Université Paris-Sud 2018–2019

L3 Physique : PAPP & PMEC

Examen de mathématiques II – Seconde session : 25 juin 2019

Durée : 3 heures

Les quatre parties sont indépendantes. Téléphones et calculatrices sont interdits.

Partie 1 : Convolution et transformée de Fourier

On rappelle la définition de la transformée de Fourier et de la transformée inverse

$$\mathcal{F}_k[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, f(x) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_x^\dagger[\hat{f}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\, \hat{f}(k) \tag{1}$$

1.1 – Donner la définition du produit de convolution $f * g$ de deux fonctions f et g.

1.2 – Rappeler la relation entre $\mathcal{F}_k[f * g]$ et les transformées de Fourier $\hat{f}(k) = \mathcal{F}_k[f]$ et $\hat{g}(k) = \mathcal{F}_k[g]$ (démontrer la relation).

1.3 – Soit un réel $a > 0$. On considère la fonction $\Pi_a(x)$ qui vaut 1 lorsque $x \in [-a, +a]$ et qui vaut 0 sinon. Que vaut le produit $\Pi_a(x) \times \Pi_a(x)$? Calculer la transformée de Fourier $\widehat{\Pi}_a(k) = \mathcal{F}_k[\Pi_a]$.

1.4 – On introduit la fonction $f_\lambda(x) = \mathrm{sinc}(\lambda x)$ pour un réel $\lambda > 0$, où $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$. Que vaut $\hat{f}_\lambda(k) = \mathcal{F}_k[f_\lambda]$? En déduire que f_λ est stable sous la convolution, i.e. montrer que $(f_\lambda * f_\lambda)(x) = c\, f_\lambda(x)$, où c est une constante que l'on donnera. Déduire $f_\lambda^{*n} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{f_\lambda * \cdots * f_\lambda}_{n \text{ fois}}$.

1.5 – Soit $y(x)$ une fonction. Exprimer $\mathcal{F}_k[y']$, la TF de sa dérivée, en fonction de $\hat{y}(k) = \mathcal{F}_k[y]$.

1.6 – Soit g une fonction $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Quelle équation vérifie la transformée de Fourier d'une solution $y(x)$ de l'équation différentielle $y''(x) + \lambda\, y'(x) + a^2\, y(x) = g(x)$?

Partie 2 : Questions diverses

2.1 – Qu'appelle-t-on les conditions de Cauchy–Riemann ? Les énoncer précisément.

2.2 – On pose $f(z) = \dfrac{1}{(2z-1)(z+2\mathrm{i})^2}$. Déterminer la nature des singularités de f et calculer ses résidus.

2.3 – Énoncer le théorème des résidus.

Partie 3 : Localisation de racines polynomiales

Soit $P(z)$ un polynôme à coefficients complexes. On suppose qu'il possède k racines distinctes $\xi_j \in \mathbb{C}$ de multiplicité $m_j \in \mathbb{N}^*$, si bien qu'on peut l'exprimer sous la forme

$$P(z) = a_n \prod_{j=1}^{k} (z - \xi_j)^{m_j},$$

où $a_n \neq 0$ est son coefficient dominant et $n = \sum_{j=1}^{k} m_j$ son degré.

3.1 – On pose $f(z) = \frac{P'(z)}{P(z)}$. En s'inspirant de la dérivée logarithmique, montrer que l'on a

$$f(z) = \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{k} \frac{m_j}{z - \xi_j}.$$

3.2 – Sur quel domaine f est-elle holomorphe et quelles sont ses singularités et leur nature ?

3.3 – Calculer les résidus aux pôles de f.

3.4 – Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\mathcal{C}$ le cercle de centre z_0 et de rayon R. Sous quelle condition peut-on affirmer que l'intégrale $I(z_0, R) = \oint_{\mathcal{C}} f(z)\,\mathrm{d}z$ existe ? En donner alors une valeur formelle.

Partie 4 : Un point fixe de la transformée de Fourier

4.1 – Énoncer le théorème de Cauchy.

Soit $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} < R$. On considère le chemin Γ parcouru dans le sens trigonométrique, réunion des cinq chemins suivants :

$$\gamma_1 = \{z = t \mid t \in [0, R]\} \qquad \gamma_2 = \left\{z = R + \mathrm{i}t \mid t \in [0, \tfrac{1}{2}]\right\} \qquad \gamma_3 = \left\{z = \tfrac{\mathrm{i}}{2} + t \mid t \in [R, \varepsilon]\right\}$$
$$\gamma_4 = \left\{z = \tfrac{\mathrm{i}}{2} + \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mid \theta \in [0, -\tfrac{\pi}{2}]\right\} \qquad \gamma_5 = \left\{z = \mathrm{i}t \mid t \in [\tfrac{1}{2} - \varepsilon, 0]\right\}$$

4.2 – Faire un schéma du contour et l'orienter dans le sens positif.

On considère la fonction $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z}}{2\cosh(\pi z)}$ et l'on rappelle que la fonction cosinus hyperbolique est définie comme $\cosh(\zeta) = \frac{\mathrm{e}^{+\zeta} + \mathrm{e}^{-\zeta}}{2}$.

4.3 – Sur quel domaine la fonction f est-elle holomorphe ?

4.4 – Montrer que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$ existe.

4.5 – Que vaut $\oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z$? Le justifier.

4.6 – Montrer que $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

4.7 – Montrer que $\mathrm{Res}(f, \frac{\mathrm{i}}{2}) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\omega}{2}}$.

4.8 – Calculer $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z$.

4.9 – Montrer que $\int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z = -\mathrm{e}^{-\frac{\omega}{2}} \int_\varepsilon^R \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{2\mathrm{i}\sinh \pi t}\,\mathrm{d}t$. En déduire que sa partie réelle admet une limite lorsque $\varepsilon \to 0^+$.

4.10 – Montrer que la partie réelle de $\int_{\gamma_5} f(z)\,\mathrm{d}z$ est nulle.

4.11 – En intégrant la fonction $f(z)$ le long du chemin Γ, en considérant la partie réelle de l'expression trouvée puis en faisant tendre ε vers 0 et R vers $+\infty$, montrer que l'on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega x}{2\cosh \pi x}\,\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{-\frac{\omega}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega x}{2\sinh \pi x}\,\mathrm{d}x - \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\omega}{2}}}{4} = 0.$$

4.12 – En remarquant que cette expression est aussi valable pour $-\omega$, calculer la valeur des intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega x}{\sinh \pi x}\,\mathrm{d}x \qquad J = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega x}{\cosh \pi x}\,\mathrm{d}x.$$

4.13 – En déduire que la fonction $g(z) = \dfrac{1}{\cosh(\pi z)}$ vérifie $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi k x} g(x)\,\mathrm{d}x = g(k)$.

À des constantes près et une renormalisation de la variable k près, la fonction g est ce qu'on appelle un point fixe de la transformée de Fourier.