L3 et Magistère de physique fondamentale — Université Paris-Sud

Examen de Physique statistique – 2ème session
Mercredi 5 juin 2019

Durée de l'épreuve : **3h.**

L'utilisation de documents, calculatrices, téléphones portables,... est interdite.

Recommandations :
Lisez attentivement l'énoncé et rédigez *succinctement* et *clairement* votre réponse.
Vérifiez vos calculs (analyse dimensionnelle, etc) ; n'oubliez pas de vous **relire**.

Formulaire

- Formule de Stirling : pour N entier, $\ln N! \simeq N \ln N - N$.
- Identité fondamentale de la *thermodynamique* : $dE = TdS - pdV + \mu dN$.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2/2}dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\,, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2/2}dx = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\,.$

1 Questions de cours : le gaz parfait

On considère un gaz parfait monoatomique constitué de N particules de masse m en contact avec un thermostat à la température T et confinées dans un volume V. L'Hamiltonien s'écrit $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m}$.

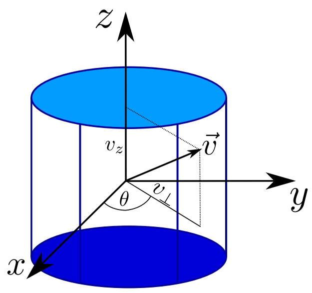
1. **Thermodynamique**
   (a) On se place dans une description semi-classique : définir les microétats. Exprimer la fonction de partition canonique Z comme une intégrale multiple.
   (b) Montrer que l'on a $Z = \dfrac{z^N}{N!}$ avec $z = \dfrac{V}{\lambda_T^3}$ et donner l'expression de λ_T en fonction de T, m et de constantes universelles.
   (c) Définir puis calculer l'énergie libre F. Rappeler comment déduire l'énergie moyenne $\overline{E}^c$ de Z et calculer-la.
   (d) Rappeler la définition de l'entropie canonique S^c. Donner l'expression de S^c/N en fonction de $n = N/V$ et λ_T. Discuter la validité du résultat semi-classique.

2. **Distribution des vitesses**
   L'expression de la densité de probabilité d'un microétat est $\rho(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N, \vec{p}_1 \dots, \vec{p}_N) = \dfrac{e^{-\beta\mathcal{H}(\vec{q}_1,\dots,\vec{p}_N)}}{N! h^{3N} Z}$.
   (a) Calculer la densité de probabilité $w(\vec{p})$ qu'une particule ait une impulsion $\vec{p}$ à $d^3\vec{p}$ près.
   (b) Montrer que la distribution des vitesses $p(\vec{v})$ prend la forme $p(\vec{v}) = g(v_x)g(v_y)g(v_z)$ avec $g(v_x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-v_x^2/2\sigma^2}$. Que vaut σ ?
   (c) On définit une vitesse caractéristique par $\bar{v} = \sqrt{\langle \vec{v}^{\,2}\rangle}$. Montrer que
   $$\bar{v} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}} \tag{1}$$
   Retrouver rapidement ce résultat à l'aide du théorème d'équipartition de l'énergie.

2 Refroidissement d'un gaz par évaporation

Ce problème a pour but de modéliser une technique de refroidissement d'un gaz par un processus d'évaporation sélective.

On considère un gaz isolé mais, pour simplifier, on se place dans une description canonique en s'appuyant sur l'équivalence des ensembles. Le gaz est contenu dans un cylindre dont la surface latérale est susceptible de laisser s'échapper une partie des atomes. Compte-tenu de la géométrie, nous souhaitons utiliser la distribution des vitesses en géométrie cylindrique pour laquelle la vitesse sera repérée par le vecteur $(v_\perp, \theta, v_z)$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$ et $v_\perp = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ le module de la composante transverse (figure ci-contre).



1. Montrer que la distribution des variables $(v_\perp, v_z)$ prend la forme $\varrho(v_\perp, v_z) = f(v_\perp) g(v_z)$ avec

$$f(v_\perp) = \frac{v_\perp}{\sigma^2}\, e^{-v_\perp^2/2\sigma^2} \tag{2}$$

et g définie à la question 2.(b) de la question de cours.

2. Vérifier que $f(v_\perp)$ est correctement normalisée.

La surface latérale est capable d'être modifiée à l'instant $t = 0$ pour laisser sortir tous les atomes ayant une énergie cinétique transverse supérieure à un seuil ε_0 ajustable expérimentalement. Les atomes éjectés vérifient donc

$$\frac{1}{2} m v_\perp^2 \geqslant \varepsilon_0 \; . \tag{3}$$

On considère que pour les temps $t < 0$, le gaz est à l'équilibre à une certaine température T_i et contient N_i particules. À $t = 0$ et pendant un bref instant, on enclenche le processus de sorte que tous les atomes qui satisfont à la condition (3) s'échappent du cylindre. On laisse alors le gaz revenir à l'équilibre et l'on note T_f la température finale et N_f le nombre final de particules.

3. Quelle est l'énergie moyenne $\overline{E}_i^c$ du gaz avant le processus d'évaporation ?

4. Illustrer le mécanisme de refroidissement sur un graphique représentant les distributions $f(v_\perp)$ avant le processus d'évaporation, juste après (en supposant que tous les atomes disparaissent d'un coup) et longtemps après (après thermalisation).

5. On note N_e le nombre d'atomes qui s'évaporent pendant le processus. Montrer que

$$N_e = N_i\, e^{-\varepsilon_0/k_B T_i} \; . \tag{4}$$

6. Justifier que l'énergie $\overline{E}_e^c$ emportée par les atomes évaporés vaut

$$\overline{E}_e^c = N_i \int_{v_0}^{\infty} dv_\perp \int_{-\infty}^{\infty} dv_z\, \varrho(v_\perp, v_z)\, \frac{m}{2}\, (v_\perp^2 + v_z^2) \; . \tag{5}$$

On donnera en particulier l'expression de v_0 en fonction de ε_0.

7. En déduire que $\overline{E}_e^c = N_e\big(\frac{3}{2} k_B T_i + \varepsilon_0\big)$. Pourquoi $\overline{E}_e^c / N_e$ est-elle supérieure à $\frac{3}{2} k_B T_i$?

8. Exprimer N_f en fonction de N_i et N_e. De même pour $\overline{E}_f^c$ en fonction de $\overline{E}_i^c$ et $\overline{E}_e^c$.

9. Donner l'expression de T_f / T_i en fonction de $\eta = \frac{\varepsilon_0}{k_B T_i}$. Montrer que la température diminue.

3 Modèle de dimères désordonnés

Un dimère correspond à deux spins 1/2 couplés interagissant par intégrale d'échange J, conduisant à 4 états possibles indicés par les nombres quantiques (j, m_j) : un état singulet $(j = 0, m_j = 0)$ et trois états triplet $(j = 1, m_j = -1, 0, +1)$. Les niveaux d'énergie possibles ε_{j,m_j} de chaque dimère plongé dans un champ magnétique externe B (ayant la dimension d'une énergie pour absorber des constantes irrelevantes) sont donnés par

$$\varepsilon_{0,0} = 0 \quad \text{(singulet)}, \qquad \varepsilon_{1,m_j} = J - Bm_j \quad \text{(triplet)} \quad \text{avec} \quad J > 0 \,. \tag{6}$$

On considère un modèle magnétique constitué d'un ensemble de dimères indépendants traité dans l'ensemble canonique.

1. Quelle est la dégénérescence g_j des états singulet et triplet en champ nul ? Représenter les énergies en fonction de B en indiquant sur chacune les nombres quantiques associés.
2. Écrire puis calculer la fonction de partition z d'un seul dimère.
3. **Un dimère en champ nul $B = 0$.**
   (a) Donner la fonction de partition z dans ce cas.
   (b) En déduire l'énergie moyenne $\overline{\varepsilon}^c$ puis montrer que la chaleur spécifique prend la forme
   $$c_J(T) = k_B\, h(T_s/T) \quad \text{avec} \quad h(x) = \frac{x^2}{3}\frac{e^x}{(1 + e^x/3)^2} \tag{7}$$
   avec T_s une température caractéristique dont on donnera l'expression en fonction des paramètres.
   (c) Tracer la courbe $c_J(T)$. Expliquer physiquement le comportement de $c_J(T)$ dans la limite $T \to 0$.
4. **Un dimère en champ fini $B \neq 0$.**
   (a) Démontrer la formule qui permet de déduire l'aimantation moyenne $\overline{m}^c = \sum_{j,m_j} m_j \frac{e^{-\beta\varepsilon_{j,m_j}}}{z}$ en fonction de l'énergie libre par dimère f.
   (b) On rappelle que la susceptibilité magnétique en champ nul est définie par $\chi_J(T) = \frac{\partial \overline{m}^c}{\partial B}\big|_{B=0}$. Donner son expression en fonction de T et T_s.
   (c) Esquissez le comportement de $\chi_J(T)$ en fonction de la température T. Quel comportement retrouvez-vous à haute température $T \gg T_s$?
5. **Ensemble de dimères désordonnés**. On considère maintenant que le cristal magnétique est constitué d'un ensemble de dimères dont les intégrales d'échange Jsont aléatoires et distribuées selon la densité de probabilité
   $$\rho(J) = \begin{cases} \frac{1}{J_{\max}} & \text{pour} \quad J \in [0, J_{\max}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{8}$$
   où $J_{\max}$ est la valeur maximale que peut prendre un couplage.
   (a) On note $\langle c_J \rangle$ la chaleur spécifique moyennée sur l'ensemble des dimères. Donner l'expression de $\langle c_J \rangle$ sous forme d'une intégrale faisant intervenir les fonctions ρ et h.
   (b) Montrer que le comportement dans la limite $T \to 0$ est de la forme $\langle c_J \rangle \propto T^\alpha$ et déterminer la valeur de l'exposant α.
   (c) De même, discuter le comportement à basse température de la susceptibilité magnétique moyennée $\langle \chi_J \rangle$.