Examen de Physique statistique – 2ème session – corrigé

1 Questions de cours : le gaz parfait

1. **Thermodynamique**
   (a) microétats : points dans l'espace des phases $(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_N, \vec{p}_1 \ldots, \vec{p}_N)$
   $$Z = \frac{1}{N!} \int \cdots \int \frac{d\vec{q}_1 \cdots d\vec{q}_N d\vec{p}_1 \cdots d\vec{p}_N}{h^{3N}} e^{-\beta \mathcal{H}(\vec{q}_1, \ldots, \vec{p}_N)} \tag{1}$$
   (b) Factorisation de Z. $\lambda_T = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$
   (c) $F = -k_B T \ln Z = -N k_B T \left\{ \ln\left(\frac{V}{N\lambda_T^3}\right) + 1 \right\}$. $\overline{E}^c = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z = \frac{3}{2} N k_B T$.
   (d) $S^c = -k_B \sum_\ell P_\ell \ln P_\ell = (\overline{E}^c - F)/T = N k_B \left\{ \ln\left(\frac{V}{N\lambda_T^3}\right) + \frac{5}{2} \right\}$. Validité : $n\lambda_T^3 \ll 1$ (haute température, basse densité).

2. **Distribution des vitesses**
   (a) $w(\vec{p}) = \dfrac{e^{-\beta\vec{p}^2/2m}}{(\sqrt{2\pi m k_B T})^3}$
   (b) $\sigma = \sqrt{k_B T/m}$
   (c) $\bar{v} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$ par l'intégrale puis pas $\langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$

2 Refroidissement d'un gaz par évaporation

1. Changement de variable $(v_x, v_y, v_z) \to (v_\perp, \theta, v_z)$ donne $p(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = \tilde{p}(v_\perp, \theta, v_z) d\theta \times v_\perp dv_\perp dv_z$ (élément de volume en cylindrique). On intègre sur l'angle, il vient $f(v_\perp) = \frac{v_\perp}{\sigma^2}\, e^{-v_\perp^2/2\sigma^2}$.
2. Normalisation en posant $s = v_\perp^2/2\sigma^2$ on se ramène au calcul d'une intégrale d'exponentielle.
3. $\overline{E}_i^c = \frac{3}{2} N_i k_B T_i$
4. Schéma
5. Condition d'évaporation $v_\perp > v_0 = \sqrt{2\varepsilon_0/m}$ et
   $$N_e = N_i \int_{v_0}^{\infty} dv_\perp f(v_\perp) \int_{-\infty}^{\infty} dv_z g(v_z) = N_i\, e^{-\varepsilon_0/k_B T_i}\ . \tag{2}$$
6. Interprétation des différents termes.
7. $\overline{E}_e^c = N_e \big(\frac{3}{2} k_B T_i + \varepsilon_0\big)$. $\overline{E}_e^c / N_e > \frac{3}{2} k_B T_i$ car les atomes éjectés sont plus énergétiques que la moyenne.
8. $N_f = N_i - N_e$ et $\overline{E}_f^c = \overline{E}_i^c - \overline{E}_e^c$.
9. $T_f/T_i = 1 - \frac{2}{3} \frac{\eta}{e^\eta - 1} < 1$ avec $\eta = \frac{\varepsilon_0}{k_B T_i}$.

3 Modèle de dimères désordonnés

1. dégénérescence $g_0 = 1$, $g_1 = 3$. Schéma.
2. $z = \sum_{j,m_j} e^{-\beta\varepsilon_{j,m_j}} = 1 + e^{-\beta J}(1 + 2\mathrm{ch}(\beta B))$, énergie libre $f = -k_B T \ln[1 + e^{-\beta J}(1 + 2\mathrm{ch}(\beta B))]$.
3. **Un dimère en champ nul $B = 0$.**
   (a) $z = 1 + 3\, e^{-\beta J}$.
   (b) $\overline{\varepsilon}^c = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln z = J\frac{1}{1 + e^{\beta J}/3}$. $c_J(T) = \frac{\partial\overline{\varepsilon}^c}{\partial T} = k_B\, h(T_s/T) \quad \text{avec} \quad h(x) = \frac{x^2}{3}\frac{e^x}{(1 + e^x/3)^2}$, avec $T_s = J/k_B$.
   (c) Courbe $c_J(T)$. Gel dans l'état singulet dans la limite $T \to 0$ à cause du gap.
4. **Un dimère en champ fini $B \neq 0$.**
   (a) $\overline{m}^c = -\frac{\partial f}{\partial B} = \frac{2\,\mathrm{sh}(\beta B)e^{-\beta J}}{1 + e^{-\beta J}(1 + 2\mathrm{ch}(\beta B))}$.
   (b) $\chi_J(T) = \frac{1}{J}\,\tilde{h}(T_s/T) \quad \text{avec} \quad \tilde{h}(x) = \frac{2}{3}\frac{x}{1 + e^x/3}$.
   (c) Courbe $\chi_J(T)$. Haute T (*question difficile car pas d'indications... mais réponse intuitive*), on retrouve le comportement de deux spins 1/2 paramagnétiques $\chi_J(T) \simeq \frac{1}{2}\frac{1}{k_B T} = 2\chi_{1/2}$. En effet, pour un spin 1/2 seul, $m_{j=1/2} = \pm 1/2$ cela donne $\bar{m} = \frac{1}{2}\mathrm{th}(\beta B/2)$ (attention, il faut prendre en compte le 1/2 ici pour comparer avec les spin un, pas comme en TD) soit $\chi_{1/2} = \frac{1}{4}\frac{1}{k_B T}$.
5. **Ensemble de dimères désordonnés**.
   (a) $\langle c_J \rangle = \int_0^{J_{\max}} dJ\, \rho(J) h(k_B T/J)$.
   (b) posons $x = J/k_B T$, alors $\langle c_J \rangle = \frac{k_B T}{J_{\max}} \int_0^{J_{\max}/k_B T} h(x)dx \propto T$ lorsque $T \to 0$ soit $\alpha = 1$.
   (c) De même, $\langle \chi_J \rangle = \frac{1}{J_{\max}} \int_0^{J_{\max}/k_B T} \frac{2}{3}\frac{1}{1 + e^x/3}dx$ tend vers un constante lorsque $T \to 0$.