Mathématiques pour la Physique II

TD 0 : Prérequis d'analyse

⚠ **Le contenu de ce sujet doit être parfaitement maîtrisé** ⚠

Si tel n'est pas le cas ⇒ À (RE)TRAVAILLER !

Exercice 1 : Dérivation

Pour des fonctions d'une variable réelle et à valeurs réelles de régularité suffisantes, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\alpha f + \beta g) = \alpha f'(x) + \beta g'(x) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[f(x)\, g(x)\big] = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\big(g(x)\big) = g'(x)\, f'\big(g(x)\big)$$

Fonction réciproque : Soit $f^{-1}(x)$ la fonction réciproque de f (i.e. $f^{-1}(f(x)) = x$). En supposant que $f'(x)$ est monotone, montrer que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \tag{1}$$

Application : en utilisant $\big(\mathrm{e}^x\big)' = \mathrm{e}^x$, retrouver la dérivée de $\ln(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 2 : Fonctions élémentaires

Par définition, on a

$$\exp(\mathrm{i}x) = \cos x + \mathrm{i}\sin x \qquad \exp(x) = \cosh x + \sinh x$$

$$\cos(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} \qquad \sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Montrer les expressions suivantes

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \qquad \sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \sinh b \cosh a$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x \qquad \sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\, \tan b} \qquad \tanh(a+b) = \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a\, \tanh b}$$

Exercice 3 : Dérivées de fonctions usuelles

Vérifier :

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$e^{\lambda x}$	$\lambda e^{\lambda x}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sin x$	$\cos x$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tanh x$	$1-\tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$

Exercice 4 : Développements limités

On rappelle la formule de Taylor pour une fonction réelle f de classe $\mathscr{C}^n$ sur un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$: $f(x) = f(x_0) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \mathcal{O}((x-x_0)^n)$.

Déduire les développements suivants (on note que $0! = 1$) :

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^n$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha\, x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\, x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\, x^k + \cdots \quad \text{(le d.l. s'arrête si } \alpha \in \mathbb{N}\text{)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)$$

Exercice 5 : Critères de convergence d'intégrales

Montrer les critères de convergence suivants :

$$
\begin{array}{llll}
\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x & \text{pour} \quad a>0\ ;\ \alpha\in\mathbb{R} & & \text{est convergente pour } \alpha>1 \\
\displaystyle\int_0^{a} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x & \text{pour} \quad a>0\ ;\ \alpha\in\mathbb{R} & & \text{est convergente pour } \alpha<1 \\
\displaystyle\int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda x}\,\mathrm{d}x & \text{pour} \quad \lambda\in\mathbb{R} & (\text{resp. } \lambda\in\mathbb{C}) & \text{est convergente pour } \lambda<0 \quad (\text{resp. } \mathrm{Re}(\lambda)<0) \\
\displaystyle\int_{-\infty}^{a} \mathrm{e}^{\lambda x}\,\mathrm{d}x & \text{pour} \quad \lambda\in\mathbb{R} & (\text{resp. } \lambda\in\mathbb{C}) & \text{est convergente pour } \lambda>0 \quad (\text{resp. } \mathrm{Re}(\lambda)>0)
\end{array}
$$

Exercice 6 : Intégration par parties

1 – Montrer la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x$$

2 – En déduire que la limite suivante existe

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

3 – Montrer que $F(x) = x\log x - x$ est une primitive de $f(x) = \log x$ soit en dérivant $F(x)$ soit en procédant par intégration par parties.