**Université Paris-Saclay** **Année 2019–2020**
**Licences L3 PAPP & PMEC**

**Mathématiques pour la Physique II**

# TD 1 : Intégration – Séries de Fourier

## Exercice 1 : Convergence d'intégrales de Riemann "impropres"

**1** – Soit $f$ une fonction bornée et $F$ une primitive de $f$. Rappeler à quelle condition l'intégrale impropre $\int_a^\infty \mathrm{d}x\, f(x)$ est-elle convergente.

**2** – Même question si $f(x)$ est divergente seulement en $a$ et bornée ailleurs : à quelle condition $\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x)$ est-elle convergente ?

**3** – À quelle condition (sur $\alpha$ et $\beta$) les intégrales suivantes sont-elles convergentes, supposant $b > 0$ ?

$$\int_b^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \qquad \text{et} \qquad \int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{x^\beta}$$

**4** – Discuter la convergence des intégrales impropres suivantes, en fonction de $\alpha > 0$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x\, x^2}{(1+x^2+x^4)^{\frac{\alpha+2}{4}}}, \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{[\sin(\pi x)]^\alpha}, \quad \int_1^\infty \mathrm{d}x \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}$$

(on supposera $a > 0$ et $b > 0$ pour la dernière)

## Exercice 2 : Théorème d'Abel

**1** – Soit $f(x)$ une fonction bornée (en valeur absolue) sur $\mathbb{R}_+$ et monotone avec $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Deux exemples : $f(x) = (1+x)^{-a}$ pour $a > 0$ ou $f(x) = 1/\big[1 + \ln(x+1)\big]$.

Discuter la convergence de l'intégrale suivante

$$I = \int_0^\infty \mathrm{d}x\, f(x)\, \sin x\,. \tag{1}$$

Est-elle absolument convergente, semi-convergente ou divergente ?

**2** – (FACULTATIF) Démontrer le théorème suivant :

**Théorème d'Abel :** Soit $f$ et $g$ deux fonctions satisfaisant les propriétés :
($i$) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.
($ii$) $f$ est dérivable et $\int_a^\infty \mathrm{d}x\, |f'(x)| < \infty$.
($iii$) $g$ est dérivable et $|g(x)|$ est bornée par une constante sur $[a, +\infty[$.
Alors

$$\int_a^\infty \mathrm{d}x\, f(x)\, g'(x) < \infty$$

Retrouver le résultat de la première question par application du théorème.

### Exercice 3 : Convergence uniforme *versus* convergence dominée

• Soit $f_n(x)$ une suite de fonctions. La suite converge *uniformément* vers $f(x)$ pour $x \in A$ si $\underset{x\in A}{\mathrm{Sup}}\,|f_n(x) - f(x)| \to 0$ pour $n \to \infty$.
Une condition *suffisante* pour permuter limite et intégrale dans $\lim_{n\to\infty} \int_A \mathrm{d}x\, f_n(x)$ est que la suite de fonctions soit uniformément convergente sur $A$, un intervalle de mesure finie.

• Le théorème de Lebesgue de la convergence dominée donne des conditions plus faibles pour permuter limite et intégrale.

**1** – Rappeler le théorème de Lebesgue de la convergence dominée.

**2** – Pour les suites de fonctions suivantes, peut-on appliquer le théorème sur la convergence uniforme ou le théorème de Lebesgue sur la convergence dominée pour permuter limite et intégrale ?

(*i*) $\int_0^1 \mathrm{d}x\, f_n(x)$ où $f_n(x) = \frac{n}{a\,n+2+(n+3)\cos(2\pi x)}$, avec $a > 2$.

(*ii*) $\int_0^1 \mathrm{d}x\, g_n(x)$ où $g_n(x) = x^n$.

(*iii*) Tracer la fonction $h_n(x) = \begin{cases} n^{3/2}x & \text{pour } x \in [0, 1/n] \\ 1/\sqrt{x} & \text{pour } x \in [1/n, 1] \end{cases}$ et discuter la convergence de $\int_0^1 \mathrm{d}x\, h_n(x)$.

### Exercice 4 : Dérivation sous le signe $\int$

**1** – Considérons l'intégrale $I(\lambda) = \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x, \lambda)$ dépendant d'un paramètre $\lambda$. Rappeler les conditions permettant de permuter dérivation par rapport à $\lambda$ et intégration.

**2** – Calculer les intégrales suivantes en utilisant la dérivation sous le signe $\int$ :

$$\int_0^\pi \mathrm{d}x\, x^2 \sin x \qquad \text{et} \qquad \int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^n\, \mathrm{e}^{-x} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}\,.$$

(ici on pourra aussi utiliser la dérivation par parties pour vérifier le résultat).

### Exercice 5 : Séries de Fourier

On rappelle que toute fonction $f$ périodique de période $T$ peut se décomposer en série de Fourier

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n x/T} \text{ où le coefficient de Fourier est } \hat{f}_n = \int_0^T \frac{\mathrm{d}x}{T}\, f(x)\, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi n x/T} \qquad (2)$$

**1** – On étudie la fonction périodique

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cosh\lambda - \cos x} \qquad \text{pour } \lambda > 0\,. \qquad (3)$$

Indication : étudier $\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^\lambda}{\mathrm{e}^\lambda - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\right)$.
Déduire le développement en série de Fourier $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ de cette fonction.

**2** – On considère la fonction périodique $g$ de période $2\pi$ qui vaut $g(x) = x$ pour $x \in ]-\pi, \pi]$. Justifier que la série de Fourier $g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{g}_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ peut se réécrire $g(x) = 2\sum_{n=1}^\infty b_n \sin nx$ et donner la relation entre les coefficients $\hat{g}_n$ et $b_n$. Calculer $b_n$.

**3** – Comparer les deux séries de coefficients $\hat{f}_n$ et $\hat{g}_n$.