Université Paris-Saclay **Année 2020–2021**
Licences L3 PAPP

Mathématiques pour la Physique II

TD 2 : Transformation de Fourier

On prendra comme définition de la transformée de Fourier d'une fonction f, sommable sur $\mathbb{R}$,

$$\hat{f}(k) = \mathcal{F}_k[f] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \tag{1}$$

La transformée de Fourier inverse est

$$f(x) = \mathcal{F}_x^{\dagger}[\hat{f}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}k\, \hat{f}(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tag{2}$$

Exercice 1 : Espaces $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$

$\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions f telles que $|f(x)|^p$ soit sommable sur $\mathbb{R}$.

1 – Les fonctions suivantes sont-elles dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$?

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}\,, \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}\mathrm{e}^{-|x|}\,, \qquad h(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$$

Exercice 2 : Trois transformées de Fourier importantes

1 – Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes

(*i*) $\Pi_1(x) = 1$ pour $|x| < 1/2$ et $\Pi_1(x) = 0$ sinon.

(*ii*) $T_1(x) = 1 - |x|$ pour $|x| < 1$ et $T_1(x) = 0$ sinon.

(*iii*) $t_1(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$

2 – **Dilatation.**– Exprimer $\mathcal{F}_k[f(x/\lambda)]$ en fonction de $\hat{f}(k) = \mathcal{F}_k[f]$.
Dans les cas suivant, tracer soigneusement la fonction et sa transformée de Fourier :

(*i*) $\Pi_a(x) = \frac{1}{a}\,\Pi_1(x/a)$.

(*ii*) $T_a(x) = \frac{1}{a}\,T_1(x/a)$.

(*iii*) $t_a(x) = \frac{1}{2a}\mathrm{e}^{-|x|/a}$

3 – Déduire la transformée de Fourier de la fonction $\Pi_a(x-b)$ (tracer d'abord la fonction).

4 – La fonction gaussienne $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$ est stable sous la transformation de Fourier, i.e. $\hat{g} = \mathcal{F}[g] = g$. Déduire

$$\mathcal{F}_k\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2v}\right)\right] \tag{3}$$

où $v > 0$.

Exercice 3 : D'autres transformées de Fourier

1 – Soient λ et μ positifs. Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = \cos(\lambda x)\,\mathrm{e}^{-\mu|x|}$$

Suggestion : rappeler $\mathcal{F}_k[\mathrm{e}^{-\mu|x|}]$

2 – Soit la fonction

$$g(x) = (1 + |x|)\,\mathrm{e}^{-|x|}$$

Discuter les propriétés de dérivabilité de la fonction à l'origine. Calculer sa transformée de Fourier. Commenter.

3 – On a vu en cours que $\sqrt{2\pi}\mathcal{F}_k[\frac{a/\pi}{x^2+a^2}] = \mathrm{e}^{-a|k|}$ pour $a > 0$. Déduire

$$\mathcal{F}_k\left[\frac{1}{(x^2+a^2)^2}\right]$$

en utilisant un truc (sans calcul d'intégrale).

Exercice 4 : À propos du théorème d'inversion

1 – Parité.– Soit $f_\pm(x)$ une fonction de parité définie : $f_\pm(-x) = \pm\, f_\pm(x)$.

a) Montrer que $\hat{f}_\pm(k) = \mathcal{F}_k[f_\pm]$ a la même parité.

b) On introduit la fonction

$$\phi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases} \tag{4}$$

Calculer sa transformée de Fourier.

c) On introduit maintenant les fonctions

$$f_\pm(x) = \phi(x) \pm \phi(-x) \tag{5}$$

Tracer ces deux fonctions. Déduire les deux transformées de Fourier $\hat{f}_\pm(k)$.

d) Vérifier que $\mathcal{F}_x^\dagger[\hat{f}_+] \to 1$ pour $x \to 0^\pm$.

e) En utilisant la propriété de symétrie, justifier que $\mathcal{F}_x^\dagger[\hat{f}_-]$ s'annule en $x = 0$.

Commentaire : On peut aussi comprendre ce résultat en utilisant la « partie principale de Cauchy ». Pour $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = C$, on définit $⨍\,\mathrm{d}x\,\frac{f(x)}{x} \overset{\text{def}}{=} \lim_{B\to+\infty}\int_{-B}^{+B}\mathrm{d}x\,\frac{f(x)}{x} = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,\frac{f(x)-f(-x)}{2x}$

2 – On considère maintenant une fonction

$$\psi(x) = a\,\phi(x - x_0) + b\,\phi(-x + x_0) \qquad \text{pour } x \neq x_0\,. \tag{6}$$

On ne précise pas la valeur de la fonction en x_0.

a) Tracer la fonction $\psi(x)$.

b) Décomposer cette fonction sur f_+ et f_-.

c) Déduire la valeur de $\mathcal{F}_x^\dagger[\hat{\psi}(k)] = \mathcal{F}_x^\dagger\big[\mathcal{F}_k[\psi]\big]$ en $x = x_0$.