Mathématiques pour la Physique II

TD 3 : Applications de la transformation de Fourier

On rappelle la définition de la transformée de Fourier d'une fonction f, sommable sur $\mathbb{R}$, et de la transformée inverse

$$\hat{f}(k) = \mathcal{F}_k[f] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \qquad \text{et} \qquad f(x) = \mathcal{F}_x^{\dagger}[\hat{f}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}k\, \hat{f}(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tag{1}$$

On rappelle également quelques propriétés utiles (à savoir retrouver *rapidement*) :
* "Translation" : $\mathcal{F}_k\left[f(x-b)\right] = e^{-\mathrm{i}kb}\hat{f}(k)$
* Propriété duale : $\mathcal{F}_k\left[f(x)e^{\mathrm{i}bx}\right] = \hat{f}(k-b)$
* "Dilatation" : $\mathcal{F}_k\left[\frac{1}{a}f(x/a)\right] = \hat{f}(ka)$
* Dérivation : $\mathcal{F}_k\left[f'(x)\right] = \mathrm{i}\,k\hat{f}(k)$

Exercice 1 : Convolutions

1 – La Lorentzienne est

$$\mathcal{L}_a(x) = \frac{a/\pi}{x^2+a^2} \tag{2}$$

Calculer la fonction $\mathcal{L}_a * \mathcal{L}_b$.
Indication : Utiliser la transformation de Fourier ; on donne $\widehat{\mathcal{L}}_a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-a|k|}$

2 – On introduit la gaussienne $g_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}$. Pour $\sigma = 1$, la fonction est invariance par transformation de Fourier :

$$\hat{g}_1 = \mathcal{F}[g_1] = g_1 \tag{3}$$

Déduire $\hat{g}_\sigma$.

En utilisant le même truc qu'à la question 1, calculer $g_a * g_b$.

3 – Application : marche aléatoire et mouvement brownien.– On considère un processus aléatoire

$$x_t = x_{t-1} + \eta_t \quad \text{pour } x_0 = 0\,, \tag{4}$$

où $\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t, \cdots\}$ sont des variables aléatoires *indépendantes* et identiquement distribuées, selon la loi de probabilité $g_\sigma(\eta)$. On note $P_t(x)$ la densité de probabilité pour la variable x_t. Justifier qu'elle obéit à la récurrence

$$P_t = g_\sigma * P_{t-1}\,. \tag{5}$$

Résoudre l'équation en supposant que $P_0 = g_a$ (utiliser le 2/).

4 – Vols de Lévy.– (Facultatif) Même question si les η_t sont distribués par la loi $\mathcal{L}_\sigma(x)$ (on suppose que $P_0 = \mathcal{L}_a$).

Exercice 2 : Équations différentielles

1 – On introduit la fonction

$$G_{\lambda,\mu}(x) = \theta_{\mathrm{H}}(x)\,\sin(\lambda x)\,\mathrm{e}^{-\mu x} \tag{6}$$

où $\theta_{\mathrm{H}}(x) = 1$ pour $x > 0$ et $\theta_{\mathrm{H}}(x) = 0$ pour $x < 0$ (fonction de Heaviside).

a) Préliminaire : calculer $\hat{G}_{\lambda,\mu} = \mathcal{F}[G_{\lambda,\mu}]$.

b) Résoudre l'équation différentielle

$$y''(x) + 2\lambda\, y'(x) + 2\lambda^2\, y(x) = \frac{1}{2a}\,\mathrm{e}^{-|x|/a}\,. \tag{7}$$

Discuter la limite $a \to 0^+$ sur le résultat (au niveau des transformées de Fourier d'abord).

2 – Diffusion quantique ?— On étudie la solution de l'équation de Schrödinger

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} \tag{8}$$

décrivant l'évolution libre d'une particule non relativiste de masse m. On posera $\lambda = \hbar/m$.

a) Déduire une équation différentielle pour la transformée de Fourier (spatiale) $\hat{\psi}(k,t) = \mathcal{F}_k[\psi(x,t)]$ puis la résoudre.

b) Initialement, la fonction d'onde est une gaussienne $\hat{\psi}(k,0) = \frac{\sqrt{a}}{\pi^{1/4}}\,\exp[-\frac{1}{2}(ka)^2]$. Déduire $\hat{\psi}(k,t)$ puis $\psi(x,t)$.

Indication : on donne $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\,\exp\{-\frac{1}{2}Ay^2 + \mathrm{i}xy\} = \sqrt{\frac{2\pi}{A}}\,\exp\{-\frac{x^2}{2A}\}$ pour $\mathrm{Re}(A) > 0$.

c) Étudier l'évolution de la densité de probabilité $|\psi(x,t)|^2$. Comparer avec la diffusion classique (cf. cours).

Exercice 3 : Une équation intégrale

Résoudre l'équation intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\,\mathrm{e}^{-\lambda|x-y|}\,f(y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}}\mathrm{e}^{-x^2/(4a)} \tag{9}$$

Indication : appliquer $\mathcal{F}$ aux deux membres de l'équation

Exercice 4 : Transformée de Fourier d'une fonction radiale dans $\mathbb{R}^3$

1 – Soit $f(||\vec{x}||)$ une fonction radiale. Exprimer sa transformée de Fourier dans $\mathbb{R}^3$ comme une intégrale radiale.
Déduire la transformée de Fourier de la fonction $f(||\vec{x}||) = 1$ pour $||\vec{x}|| < a$ et $f(||\vec{x}||) = 0$ sinon.

2 – Potentiel de Yukawa.– Si l'on introduit une charge électrique dans un métal, les charges électriques de ce dernier se meuvent afin d'écranter la charge extérieure. Considérons la densité de charge

$$\rho_{\mathrm{ext}}(\vec{x}) = Q\,\frac{1}{(2\pi\,\varepsilon^2)^{3/2}}\,\exp\left\{-\frac{\vec{x}^{\,2}}{2\varepsilon^2}\right\} \tag{10}$$

L'équation décrivant le potentiel dans le métal en présence de cette densité est

$$\left(-\Delta + \kappa^2\right) V(\vec{x}) = 4\pi\, \rho_{\mathrm{ext}}(\vec{x}) \tag{11}$$

où $1/\kappa$ est la longueur d'écran (dans un bon métal, c'est une échelle atomique). Le terme $-\kappa^2 V(\vec{x})$ correspond à la densité induite par le déplacement des charges du métal.

a) Prendre la transformée de Fourier de l'équation différentielle.

b) Discuter le sens physique de la limite $\varepsilon \to 0^+$

c) Déduire $\hat{V}(\vec{k})$ dans cette limite puis revenir à $V(\vec{x})$.