

Mathématiques pour la Physique II

TD 4 : Fonctions holomorphes

Exercice 1 : Racines n -ième de moins l'unité

1 – (*) Donner les racines de l'équation $z^n + 1 = 0$ (avec $n \geq 1$). On les note $\{z_0, \dots, z_{n-1}\}$.

2 – Montrer que $\sum_{0 \leq k < l \leq n-1} z_k z_l = 0$ (pour $n > 2$).

Exercice 2 : Dérivabilités au sens de \mathbb{R}^2 et de \mathbb{C}

1 – (*) Pour une fonction $f(z) = F(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y)$ avec $z = x + iy$ et $P, Q \in \mathbb{R}$, y a-t-il équivalence entre la dérivabilité de F par rapport à x et y , et celle de f au sens complexe ?

2 – (*) On introduit les opérateurs différentiels

$$\partial = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{et} \quad \bar{\partial} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

agissant sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1 de deux variables réelles à valeurs complexes. Calculer ∂z , $\partial \bar{z}$, $\bar{\partial} z$ ainsi que $\bar{\partial} \bar{z}$.

3 – (*) Si f est holomorphe, montrer que

$$f'(z) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{i} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y).$$

4 – Soit $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ une fonction holomorphe. Montrer que le jacobien du mapping $(x, y) \mapsto (u, v)$ est $J = |f'(z)|^2$.

Vocabulaire : l'application $w = f(z)$, avec $f'(z) \neq 0$, est appelée une *transformation conforme*. Par exemple, on pourra vérifier que la transformation $f(z) = (iz + 1)/(z + i)$, analytique sur le demi-plan complexe supérieur, permet de mapper ce dernier sur le disque unité, $D(0, 1) = \{w \in \mathbb{C}, |w| < 1\}$.

Exercice 3 : Conditions de Cauchy–Riemann

1 – (*) Soit la fonction $F(x, y) = x^2 + y^2 + ixy$. Est-ce que la fonction vérifie les conditions de Cauchy–Riemann ? Retrouver le résultat précédent en exprimant F à l'aide de z et \bar{z} .

2 – (*) Soit $P(x, y) = x^2 + y^2$. Existe-t-il $Q(x, y)$ de telle sorte que $f = P + iQ$ soit holomorphe dans un ouvert de \mathbb{C} ?

3 – Même question pour $P(x, y) = \cosh x \cos y$.

4 – (*) Démontrer que si $f = P + iQ$ est une fonction entière (holomorphe dans la totalité de \mathbb{C}), alors les faisceaux de courbes $P(x, y) = \text{cst}$ et $Q(x, y) = \text{cst}$ se coupent orthogonalement.

5 – Facultatif : Si l'on prend dans le plan non plus les coordonnées cartésiennes (x, y) , mais les coordonnées polaires (r, θ) , comment se réécrivent les conditions de Cauchy–Riemann ?

6 – Facultatif : On écrit $z = r e^{i\theta}$. Vérifier que $\text{Ln } z \stackrel{\text{def}}{=} \ln r + i\theta$ est holomorphe ; on choisit $\theta \in]-\pi, +\pi]$, ce qui correspond à la « détermination principale du logarithme ». Discuter la continuité de $\text{Ln } z$ et déduire son domaine d'analyticité.

Exercice 4 : Propriétés des fonctions holomorphes

Montrer que, si $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe sur un ouvert connexe de \mathbb{C} , les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est constante sur D ;
2. $P = \text{Re}(f)$ est constante sur D ;
3. $Q = \text{Im}(f)$ est constante sur D ;
4. $|f|$ est constante sur D ;
5. $\varphi = \arg f$ est constant sur D ;
6. \bar{f} est holomorphe sur D .