Université Paris-Saclay
Licences L3 PAPP & PMEC **Année 2019–2020**

Mathématiques pour la Physique II

TD 8 : Distribution de Dirac

Exercice 1 : Introduction - Définition de la distribution de Dirac

1 – On introduit la fonction

$$\delta_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varepsilon/\pi}{x^2+\varepsilon^2} . \tag{1}$$

a) Tracer la soigneusement.
b) Analyser $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \delta_\varepsilon(x)$ pour $x \neq 0$ et pour $x = 0$.
c) Soit $\varphi(x)$ une fonction continue à l'origine. Calculer

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \delta_\varepsilon(x)\, \varphi(x) . \tag{2}$$

On supposera également que φ décroît « vite » à l'infini, afin que l'intégrale soit absolument convergente.
d) Calculer la dérivée $\delta'_\varepsilon(x)$. La tracer *soigneusement*. Calculer

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \delta'_\varepsilon(x)\, \varphi(x) . \tag{3}$$

e) Même question avec $\delta''_\varepsilon(x)$.
f) Donner la transformée de Fourier $\hat{\delta}_\varepsilon(k)$ (cf. TD précédent). La tracer et discuter la limite $\varepsilon \to 0^+$. Quelle forme prend la représentation $\delta_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}k}{\sqrt{2\pi}}\, \hat{\delta}_\varepsilon(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ dans cette limite ?
g) Que vaut $\mathcal{F}_k\big[\delta_\varepsilon^{(n)}(x)\big]$? Discuter la limite $\varepsilon \to 0^+$.

2 – Aurions nous pu baser la discussion sur les fonctions suivantes ?

$$\Pi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{pour } |x| < \varepsilon/2 \\ 0 & \text{pour } |x| > \varepsilon/2 \end{cases} , \qquad T_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}\left(1 - \frac{|x|}{\varepsilon}\right) & \text{pour } |x| < \varepsilon \\ 0 & \text{pour } |x| > \varepsilon \end{cases} ,$$

$$\Phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi\varepsilon}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) , \quad \Psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi\varepsilon}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) , \quad \Upsilon_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\exp\left(-\frac{|x|}{\varepsilon}\right) ,$$

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\varepsilon}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x/\varepsilon)^2} .$$

> La distribution de Dirac peut être vue comme la limite de $\delta_\varepsilon(x)$ pour $\varepsilon \to 0^+$. Dans les exercices qui suivent, on utilisera la relation fondamentale :
>
> $$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \delta(x)\, \varphi(x) = \varphi(0) \tag{4}$$
>
> où φ est une fonction continue en 0.

Exercice 2 : Intégrales avec δ

Calculer les intégrales suivantes

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \delta(ax+b)\, x^2 \qquad \text{avec } a>0$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{x}\, \delta(R-||\vec{x}||)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{x}\, \delta(R^2-\vec{x}^{\,2})$$

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}k \int_0^\infty \mathrm{d}x\, x\, \mathrm{e}^{-x}\, \cos(k(x^2-\lambda))$$

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \delta(\sin(\pi x))\, \frac{\pi}{x^2+a^2}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}p\, \delta(x^2+p^2-E)$$

Exercice 3 : Densités d'états quantiques pour des particules libres

La distribution de Dirac est très utile pour calculer des **densités**. Par exemple, si l'on considère un problème quantique, caractérisé par un spectre des énergies $\{\varepsilon_n\}$, le concept de « densité d'états », définie comme $\rho(\varepsilon)=\sum_n \delta(\varepsilon-\varepsilon_n)$, est très utile.

1 – Soit $I=[E_1,E_2]$ un intervalle. Que représente $\int_I \mathrm{d}\varepsilon\, \rho(\varepsilon)$?

2 – On considère des particules libres ultrarelativistes. Les états quantiques libres sont des ondes planes $|\phi_{\vec{k}}\rangle$, d'énergie $\varepsilon_{\vec{k}}=\hbar c||\vec{k}||$. Calculer la densité des états quantiques par unité de volume en dimension d (pour $\hbar c=1$)

$$\rho(\varepsilon)=\int \frac{\mathrm{d}^d\vec{k}}{(2\pi)^d}\, \delta(\varepsilon-||\vec{k}||) \tag{5}$$

Indication : la surface d'une sphère de rayon unité en dimension d est $S_d=2\pi^d/\Gamma(d/2)$.

3 – Même question pour des particules non relativistes avec $\varepsilon_{\vec{k}}=\frac{\hbar^2\vec{k}^{\,2}}{2m}$ (en faisant $\hbar^2/(2m)=1$) :

$$\rho(\varepsilon)=\int \frac{\mathrm{d}^d\vec{k}}{(2\pi)^d}\, \delta(\varepsilon-\vec{k}^{\,2}) \tag{6}$$

Exercice 4 : Normalisation des ondes planes sur $\mathbb{R}^+$ en MQ

On considère l'équation de Schrödinger libre sur $\mathbb{R}^+$, avec condition de Dirichlet à l'origine. Une base de fonctions est

$$\phi_k(x)=C\,\sin(kx) \qquad \text{pour } k>0\,. \tag{7}$$

1 – Calculer la constante C assurant la condition d'orthonormalisation des ondes planes

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\,\phi_k(x)\,\phi_{k'}(x) = \delta(k-k') \tag{8}$$

2 – On souhaite maintenant indicer les ondes planes à l'aide de l'énergie $E = k^2$. On les note alors $\psi_E(x) = B\,\sin(\sqrt{E}\,x)$. Calculer la nouvelle constante de normalisation assurant la condition

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\,\psi_E(x)\,\psi_{E'}(x) = \delta(E-E')\,. \tag{9}$$

Exercice 5 : Distribution de la position d'un oscillateur 1D en mécanique statistique

On considère une particule en une dimension, soumise à un potentiel $V(x)$ **confinant** (i.e. t.q. $V(x) \to +\infty$ pour $x \to \pm\infty$). Le postulat fondamental de la physique statistique nous dit que la distribution microcanonique ρ^* est uniforme dans l'espace des phases, i.e. la loi jointe de la position et de l'impulsion est

$$\rho^*(x,p) = C\,\delta\left(p^2 + V(x) - E\right) \tag{10}$$

1 – Déduire la distribution de la position

$$w(x) = \int \mathrm{d}p\,\rho^*(x,p)\,, \tag{11}$$

à une normalisation près.

Exercice 6 : Distribution de Dirac δ et fonction de Heaviside θ_H

1 – On définit la fonction

$$\theta_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,. \tag{12}$$

a) Tracer soigneusement $\theta_\varepsilon(x)$.
b) Calculer $\theta'_\varepsilon(x)$.
c) Discuter la limite $\varepsilon \to 0^+$ pour les deux fonctions.
d) Préciser quelle est la valeur de $\theta_\varepsilon(0)$.

2 – On donne un autre éclairage sur la relation précédente. La fonction de Heaviside est définie comme

$$\theta_\mathrm{H}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases} \tag{13}$$

Discuter la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^x \mathrm{d}t\,\delta(t)$ en fonction de x. Déduire la relation entre $\theta_\mathrm{H}(x)$ et $\delta(x)$.

3 – Applications :

a) La fonction indicatrice d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est $\chi_A(x) = 1$ pour $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ pour $x \notin A$. Calculer la dérivée de la fonction indicatrice d'un intervalle, $\chi_{[a,b]}(x)$.

b) En exprimant la fonction $\mathrm{sign}(x)$ en fonction de $\theta_{\mathrm{H}}(x)$, donner sa dérivée.

c) Déduire $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}|x-x_0|$ et $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\max(x,x_0)$.

4 – On considère la fonction $\Pi_\varepsilon(x)$ définie dans le premier exercice (et un TD précédent). Calculer $\Pi'_\varepsilon(x)$. Soit φ une fonction continue, exprimer $\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}x\,\Pi'_\varepsilon(x)\,\varphi(x)$ puis discuter la limite $\varepsilon\to 0^+$ (faire d'abord l'intégration *puis* prendre la limite).

5 – Discutons des applications de la relation entre θ_{H} et δ. on considère l'équation différentielle

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\lambda\right)y(x)=\delta(x)\,. \tag{14}$$

Vérifier que $y(x)=\theta_{\mathrm{H}}(x)\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$ est solution.

Facultatif : En supposant que $\lambda>0$, résoudre l'équation différentielle à l'aide de la transformation de Fourier. Et pour $\lambda<0$?

6 – On considère maintenant l'équation différentielle

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\right)G(t)=\delta(t)\,. \tag{15}$$

Montrer que $G_R(t)=\theta_{\mathrm{H}}(t)\,\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)$ est solution. Vérifier que $G_F(t)=\frac{1}{2\mathrm{i}\omega}\exp\left\{\mathrm{i}\omega|t|\right\}$ est aussi solution.

Exercice 7 : Changement de variable dans une distribution et générateurs de nombres aléatoires

Considérons une variable aléatoire X distribuée selon la loi $p(x)$. Nous notons $\langle\cdots\rangle_X$ la moyenne sur la variable aléatoire.

1 – Justifier que l'on peut écrire $p(x)=\langle\delta(x-X)\rangle_X$.

2 – Soit f une fonction monotone. Utiliser la remarque précédente pour relier $p(x)$ à la distribution $q(y)$ de la variable aléatoire $Y=f(X)$.

3 – Application : générateurs de nombres aléatoires

a) soit X une variable distribuée uniformément sur l'intervalle $[0,1]$. Quelle est la distribution de la variable $Y=-\ln X$?

b) On considère deux variables gaussiennes identiques et indépendantes, X et Y, distribuées selon la loi jointe

$$P(x,y)=\frac{1}{\pi}\exp\{-x^2-y^2\}\,. \tag{16}$$

Quelle est la distribution de $Z=X^2+Y^2$? Quelle est la distribution de l'angle θ définissant la direction du vecteur $X\vec{u}_x+Y\vec{u}_y$?

Sachant qu'un ordinateur fournit des nombres aléatoires uniformément distribués sur $[0,1]$, déduire une manière de programmer un générateur de nombres aléatoires gaussiens.

Exercice 8 : Fonctions de Green

1 – Bille dans un fluide soumise à une force oscillante.— On étudie l'équation différentielle

$$\ddot{x}(t)+\frac{1}{\tau}\,\dot{x}(t)=\frac{F_\omega}{m}\,\cos(\omega t)\,, \tag{17}$$

où $1/\tau$ est relié au coefficient de viscosité.

a) Donner l'équation pour la fonction de Green $G(t)$ associée à l'équation différentielle (pour la vitesse).

b) Calculer $G(t)$.

c) Déduire la solution de l'équation différentielle (17) (en régime permanent).

2 – Oscillateur électrique

a) On soumet un oscillateur électrique (circuit LC) à une impulsion électrique exponentielle :

$$\ddot{Q}(t) + \frac{1}{LC}\,Q(t) = \frac{U(t)}{L} \qquad \text{avec } U(t) = \theta_{\mathrm{H}}(t)\,U_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t} \tag{18}$$

La fonction de Green « retardée » a été donnée plus haut : $G(t) = \theta_{\mathrm{H}}(t)\,\frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$. Exprimer ω_0 en fonction de L et C. Déduire la solution $Q(t)$ nulle pour $t < 0$.

b) Facultatif : **Effet de la dissipation.**– On étudie maintenant le circuit RLC en ajoutant un terme $(R/L)\,\dot{Q}(t)$ à l'équation précédente. On pose $2/\tau = R/L$. Écrire la nouvelle équation pour la fonction de Green et la résoudre en utilisant l'analyse de Fourier. Étudier la fonction de Green dans la limite $\tau\omega_0 \gg 1$.

Exercice 9 : Distribution de Dirac dans $\mathbb{R}^d$ et fonction de Green du Laplacien

On définit la distribution de Dirac dans $\mathbb{R}^3$ comme

$$\delta(\vec{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \delta(x)\delta(y)\delta(z) \tag{19}$$

1 – Calculer

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{x}\,\delta(\vec{x})\,. \tag{20}$$

2 – Reprendre l'exercice du TD précédent sur le potentiel de Yukawa et réinterpréter le résultat pour donner la fonction de Green de l'équation $\left[-\Delta + \kappa^2\right]G_\kappa(\vec{x}) = \delta(\vec{x})$. Déduire la fonction de Green du Laplacien $G_0(\vec{x})$.

3 – Écrire la solution de l'équation de Poisson (dans le système CGS)

$$\Delta V(\vec{x}) = -4\pi\,\rho(\vec{x}) \tag{21}$$

pour une densité de charge $\rho(\vec{x})$ quelconque à l'aide de $G_0(\vec{x})$.