Examen partiel de mathématiques

Lundi 2 mars 2020

Durée de l'épreuve : **2 heures.**

L'utilisation de documents, téléphones portables, calculatrices, ... est interdite.

Recommandations :

Lisez attentivement l'énoncé et **rédigez** *succinctement* et *clairement* votre réponse.
n'oubliez pas de vous **relire**.

Question de cours

On rappelle la définition de la transformée de Fourier d'une fonction $f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R})$,

$$\hat{f}(k) = \mathcal{F}_k[f] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \qquad \text{et} \qquad f(x) = \mathcal{F}_x^\dagger[\hat{f}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}k\, \hat{f}(k)\, \mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx} \tag{1}$$

la transformée de Fourier inverse.

1/ Rappeler la définition de l'espace $\mathscr{L}_1(\mathbb{R})$.

Exprimer les transformées de Fourier suivantes en fonction de $\hat{f}$ (une *brève* démonstration est demandée à chaque fois) :

2/ $\mathcal{F}_k[f(x/\lambda)]$ pour $\lambda > 0$.

3/ $\mathcal{F}_k[f'(x)]$.

4/ $\mathcal{F}_k[x\, f(x)]$.

5/ $\mathcal{F}_k[f(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 x}]$.

6/ Exprimer $\mathcal{F}_k[(f * g)(x)]$ en fonction de $\hat{f}(k)$ et $\hat{g}(k)$.

On rappelle la définition du produit de convolution de deux fonctions f et g :
$(f * g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, f(x-y) g(y)$.

Exercice 1 : transformation de Fourier d'une fonction

On introduit la fonction $\phi(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$.

1/ Calculer la transformée de Fourier $\hat{\phi}(k) = \mathcal{F}_k[\phi]$

On définit la fonction

$$F(x) = x\, \mathrm{e}^{-a|x|} \cos(bx) \qquad \text{avec } a > 0 \text{ et } b > 0\,. \tag{2}$$

2/ Justifier que $F \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R})$

3/ Calculer $\hat{F}(k) = \mathcal{F}_k[F]$

Suggestion : on pourra s'aider des propriétés démontrées dans la question de cours.

Exercice 2 : Circuit RL

On considère un circuit RL forcé par une tension $U(t) = S(t)/L$. Le courant $I(t)$ dans le circuit obéit à l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + \lambda\, I(t) = S(t) \tag{3}$$

où $\lambda = R/L$ est l'inverse d'un temps caractéristique. On suppose que $S \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R})$.

1/ Quelle équation est satisfaite par $\hat{I}(k) = \mathcal{F}_k[I]$ et $\hat{S}(k) = \mathcal{F}_k[S]$?

2/ Déduire que la solution de l'équation différentielle est de la forme $I(t) = (G * S)(t)$. On donnera l'expression de $\hat{G}(k)$.

3/ On introduit la fonction $\gamma_a(x) = \theta_{\mathrm{H}}(x)\,\mathrm{e}^{-ax}$, où la fonction de Heaviside est définie par $\theta_{\mathrm{H}}(x) = 1$ pour $x > 0$ et $\theta_{\mathrm{H}}(x) = 0$ pour $x < 0$.

Calculer $\hat{\gamma}_a(k)$ pour $a > 0$. Déduire $G(t)$.

4/ On applique une tension correspondant à

$$S(t) = \frac{\mu}{2}\,\mathrm{e}^{-\mu|t|} \qquad \text{avec } \mu > 0\,. \tag{4}$$

Calculer directement l'intégrale donnant $(G*S)(t)$, sans utiliser de transformation de Fourier.

Indication : distinguer $t < 0$ et $t > 0$ pour calculer l'intégrale.

5/ Que devient la solution pour $\mu \to \lambda$?

6/ Tracer *soigneusement* le graphe de la fonction $S(t)$ (montrer sur votre figure la hauteur et la largeur de la fonction).

Puis tracer, *encore plus soigneusement*, $I(t)$ en fonction de t (on pourra supposer $\mu \gg \lambda$; le graphe fera apparaître la hauteur de la fonction et sur quelle échelle elle croît/décroît).

7/ Discuter la limite $\mu \to +\infty$ de l'expression de $I(t) = (G * S)(t)$ trouvée à la question **4/**. On distinguera $t < 0$, $t = 0$ et $t > 0$. Commentaire ?

Exercice 3 : fonction d'une variable complexe

1/ Question de cours : Soit $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y)$ une fonction de la variable complexe $z = x + \mathrm{i}\, y$.

Rappeler les conditions de Cauchy-Riemann satisfaites par sa partie réelle u et sa partie imaginaire v.

Pour les deux fonctions suivantes

2/ $u(x, y) = \sin(x)\,\sin(y)$

3/ $u(x, y) = \mathrm{sh}(x)\,\sin(y)$,

répondre aux deux questions :
(i) cette fonction $u(x, y)$ peut-elle être la partie réelle d'une fonction holomorphe $f(z)$?
(ii) si oui, quelle est alors la partie imaginaire $v(x, y)$ de f, et donner l'expression de $f(z)$ en fonction de z ?