

EXAMEN PARTIEL DE PHYSIQUE STATISTIQUE

Mercredi 11 mars 2020

*Durée de l'épreuve : 2h.**L'utilisation de documents, calculatrices, téléphones portables, ... est interdite.***Recommandations :**Lisez attentivement l'énoncé et rédigez *succinctement* et *clairement* votre réponse.Vérifiez vos calculs (analyse dimensionnelle, etc); n'oubliez pas de vous **relire**.Pensez aux **informations en annexe**.**1 Questions de cours : contact thermique et fluctuations (~ 40mn)****A. Gaz parfait monoatomique classique :** on considère un gaz parfait de N atomes non relativistes de masse m dans un volume V .

- 1/ Rappeler la formule semiclassique permettant de calculer le nombre $\Phi(E)$ de microétats d'énergies inférieures à E (les atomes sont indiscernables).
- 2/ Justifier que $\Phi(E) \propto E^{fN}$ où f est un nombre d'ordre 1 dont on donnera la valeur, en la justifiant (le calcul précis de $\Phi(E)$ n'est ni exigé ni nécessaire).
- 3/ Donner les définitions de l'entropie $S^*(E)$ et de la température $T^*(E)$ microcanoniques.
- 4/ Quelle est la relation entre $S^*(E)$ et $\Phi(E)$? Justifier. Dédurre l'expression de $T^*(E)$ pour le gaz parfait (dans la limite $N \gg 1$).
- 5/ Donner l'expression de la capacité calorifique du gaz, $C_V^* \stackrel{\text{def}}{=} [\partial T^* / \partial E]^{-1}$.

B. Contact thermique entre deux gaz parfaits : on considère deux gaz parfaits de N_1 et N_2 atomes de masses m_1 et m_2 , occupant deux enceintes contiguës de volumes V_1 et V_2 . Au moment où les deux gaz sont mis en contact, ils ont initialement des énergies $E_1^{(i)}$ et $E_2^{(i)}$. Ils sont séparés par une paroi diatherme (permettant des transferts d'énergie) et un équilibre finit par s'établir.

- 1/ Donner les expressions des températures microcanoniques des deux gaz, que nous noterons plus simplement $T_1(E_1)$ et $T_2(E_2)$ (utiliser la partie **A.**).
- 2/ Quelle est la condition d'équilibre thermique ?
- 3/ Exprimer la valeur la plus probable de l'énergie E_1 en fonction de $E_1^{(i)}$ et $E_2^{(i)}$.
- 4/ Exprimer la température finale T_f en fonction de $T_{1i} \equiv T_1(E_1^{(i)})$ et $T_{2i} \equiv T_1(E_2^{(i)})$.
- 5/ On rappelle que la variance de l'énergie est donnée par

$$\text{var}(E_1) = k_B T_f^2 \left(\frac{1}{C_{V1}} + \frac{1}{C_{V2}} \right)^{-1} \quad (1)$$

où C_{V1} et C_{V2} sont les capacités calorifiques des deux systèmes. Donner l'expression de $\text{var}(E_1)$ en fonction de T_f , N_1 , N_2 et k_B .

- 6/ L'ensemble microcanonique donne une relation bijective entre énergie et température. $T_1 = T_1(E_1)$. Dédurre l'expression de la variance de la température microcanonique du gaz n°1, $\text{var}(T_1)$. Discuter les fluctuations *relatives* de la température microcanonique.

2 Refroidissement magnétique ($\sim 1\text{h}20\text{mn}$)

Les réfrigérateurs domestiques utilisent un fluide qui subit des cycles de compression/décompression permettant d'extraire de la chaleur d'une source froide pour en réinjecter dans une source chaude (l'environnement). Dans le problème, nous montrons qu'un cycle d'aimantation/désaimantation d'un système magnétique permet également la conversion d'énergie magnétique en chaleur.

Nous considérons un modèle simple de cristal paramagnétique : N spins $1/2$ sur un réseau, soumis à un champ magnétique B . Chaque spin peut occuper deux états $|+\rangle$ ou $|-\rangle$ d'énergies $\varepsilon_{\pm} = \mp m_0 B$, où $m_0 > 0$ est l'aimantation du spin dans l'état $|+\rangle$. Les interactions entre spins sont supposées *négligeables*.

- 1/ **Question de cours** : Rappeler la définition (générale) de la fonction de partition canonique puis de l'énergie libre F . On introduira $\beta = 1/(k_B T)$ où T est la température du thermostat ;
- 2/ Calculer la fonction de partition pour un spin, z_{spin} . Et déduire la fonction de partition du cristal paramagnétique de N spins Z_{cristal} .
- 3/ **Équation d'état.**— Chaque spin peut avoir deux aimantations ($+m_0$ dans l'état $|+\rangle$ ou $-m_0$ dans l'état $|-\rangle$). Comment déduire l'aimantation moyenne \overline{M}^c de l'énergie libre F ? Calculer l'aimantation moyenne par spin, $m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \overline{M}^c$. Cette équation $m = m(B, T)$ joue le rôle de l'*équation d'état*. Tracer deux isothermes pour des températures T_c et $T_f < T_c$ dans le plan (m, B) .
- 4/ **Question de cours** : À partir de la formule de Gibbs-Shannon, montrer que l'entropie canonique est $S^c = (\overline{E}^c - F)/T$.
- 5/ Déduire que l'entropie par spin $S = \frac{1}{N} S^c_{\text{cristal}}$ est seulement fonction de $x = \beta m_0 B$. Donner son expression.

6/ Transformation isotherme :

- a) **Travail.**— Calculer le « travail » (pour un spin) lors d'une transformation réversible le long de l'isotherme T , pour aller de l'état $(B = 0, m = 0)$ jusqu'à un état (B, m) :

$$W^{(T)}(0 \rightarrow B) = - \int_0^B m(B', T) dB' . \quad (2)$$

- b) **Chaleur.**— Montrer que la chaleur reçue (par spin) le long de la transformation isotherme est donnée par

$$Q^{(T)}(0 \rightarrow B) = -k_B T \Phi \left(\frac{m_0 B}{k_B T} \right) \quad \text{où} \quad \Phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} x \operatorname{th} x - \ln(\operatorname{ch} x) \quad (3)$$

Étudier les comportements limites de $\Phi(x)$ et tracer la *très soigneusement*.

Suggestion : on pourra utiliser $\Delta\varepsilon = Q + W$ et que l'énergie d'un spin est $\varepsilon = -mB$ (c'est l'énergie moyenne canonique, $\varepsilon = \overline{E}^c/N$).

7/ Transformation isentropique.— Aucune chaleur n'est échangée avec l'extérieur.

- a) Justifier qu'une transformation isentropique correspond à $B/T = \text{cste}$. Représenter une isentrope dans le plan (m, B) .
- b) Montrer que le travail de la transformation isentropique allant de B_1 à B_2 est donné par

$$W^{(\text{isentropie})}(B_1 \rightarrow B_2) = k_B T_1 x_1 \operatorname{th} x_1 - k_B T_2 x_2 \operatorname{th} x_2 \quad \text{avec} \quad x_1 = \frac{m_0 B_1}{k_B T_1} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{m_0 B_2}{k_B T_2} .$$

8/ **Cycle de Carnot.**— Nous étudions maintenant le cycle :

- Transformation isotherme à T_1 allant de $B = 0$ à $B = B_1$.
- Transformation isentropique allant de $B = B_1$ à $B = B_2 < B_1$.
- Transformation isotherme à $T_2 < T_1$ allant de $B = B_2$ à $B = 0$.

- a) Représenter le cycle dans le diagramme (m, B) .
- b) Donner l'expression du travail reçu par le système pendant le cycle

$$W = - \oint dB m = W^{(T_1)}(0 \rightarrow B_1) + W^{(\text{isentropie})}(B_1 \rightarrow B_2) + W^{(T_2)}(B_2 \rightarrow 0) \quad (4)$$

- c) Exprimer la chaleur $Q_f > 0$ reçue par le système depuis la source froide.
- d) Dédire l'expression de l'efficacité du cycle $\eta_{\text{frigo}} \stackrel{\text{def}}{=} Q_f/W$ en fonction de T_1 et T_2 .

Annexe

- Formule de Stirling : $\ln N! \simeq N \ln N - N$ pour $N \gg 1$.
- Identité fondamentale de la *thermodynamique* : $dE = T dS - p dV + \mu dN - M dB + \dots$.

EXAMEN PARTIEL DE PHYSIQUE STATISTIQUE DU 11 MARS 2020 — SOLUTIONS

1 Questions de cours : contact thermique et fluctuations

A. Gaz parfait monoatomique classique :

1&2/ La formule semiclassique pour la densité d'états intégrée

$$\Phi(E) = \frac{1}{N!} \int_V d^3\vec{r}_1 \cdots \int_V d^3\vec{r}_N \int d^3\vec{p}_1 \cdots \int d^3\vec{p}_N \theta_H \left(E - \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} \right) \quad (5)$$

montre que celle-ci est proportionnelle au volume de la sphère de rayon $\sqrt{2mE}$ dans l'espace de dimension $3N$ des impulsions. On a donc $\Phi(E) \propto E^{3N/2}$.

3/ L'entropie microcanonique est $S^*(E) = k_B \ln \Omega(E)$ où $\Omega(E) = \Phi'(E) \delta E$ est le nombre d'états accessibles, i.e. $\in [E, E + \delta E]$. Et $1/T^* \stackrel{\text{def}}{=} \partial S^*/\partial E$.

4/ En utilisant $\Phi'(E) = (3N/2E)\Phi(E)$, on voit que $S^*(E) \simeq k_B \ln \Phi(E)$ à des termes logarithmiques $\mathcal{O}(\ln N)$ près, négligeables (S^* est $\mathcal{O}(N)$).

On a donc $S^*(E) = \frac{3Nk_B}{2} \ln E + \dots$ d'où $T^*(E) = 2E/(3Nk_B)$.

5/ On déduit la capacité calorifique

$$C_V^* \stackrel{\text{def}}{=} [\partial T^*/\partial E]^{-1} = \frac{3Nk_B}{2}. \quad (6)$$

B. Contact thermique entre deux gaz parfaits :

1/ $T_1(E_1) = 2E_1/(3N_1k_B)$ et $T_2(E_2) = 2E_2/(3N_2k_B)$.

2/ La condition d'équilibre thermique est $T_1(E_1) = T_2(E_{\text{tot}} - E_1)$ où $E_{\text{tot}} = E_1^{(i)} + E_2^{(i)}$

3/ La solution de cette équation (linéaire) correspond à la valeur la plus probable de l'énergie du gaz numéro 1, notée E_1^{max} . On trouve $E_1^{\text{max}} = \frac{N_1}{N_1+N_2} E_{\text{tot}}$.

4/ La température finale est $T_f = T_1(E_1^{\text{max}}) = \frac{2E_{\text{tot}}}{3(N_1+N_2)k_B}$. Ou encore

$$T_f = \frac{N_1 T_{1i} + N_2 T_{2i}}{N_1 + N_2}. \quad (7)$$

5/ La variance de l'énergie est

$$\text{var}(E_1) = \frac{3}{2} k_B T_f^2 \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} \quad (8)$$

6/ $T_1 = T_1(E_1)$ est une bijection entre énergie et température. On peut ainsi obtenir une expression pour les fluctuations de la température :

$$\text{var}(T_1) = \frac{2N_2}{3N_1(N_1 + N_2)} T_f^2 \quad (9)$$

Les fluctuations relatives sont donc

$$\frac{\sqrt{\text{var}(T_1)}}{T_f} = \sqrt{\frac{2N_2}{3N_1(N_1 + N_2)}} \quad (10)$$

en général, on a donc $\delta T_1/T_f \sim 1/\sqrt{N_1}$ si $N_1 \sim N_2$ ou $N_1 \ll N_2$. Dans ce dernier cas (le gaz 2 joue le rôle de thermostat) $\delta T_1/T_f \simeq \sqrt{2/(3N_1)}$.

2 Refroidissement magnétique

Un cristal paramagnétique joue le rôle de machine thermique.

1/ Question de cours : $Z = \sum_{\ell} e^{-\beta E_{\ell}}$ où la somme porte sur les microétats. $F = -\frac{1}{\beta} \ln Z$.

2/ Fonction de partition pour un spin : $z_{\text{spin}} = e^{-\beta \varepsilon_+} + e^{-\beta \varepsilon_-} = 2 \text{ch}(\beta m_0 B)$.

Les N spins sont identiques, indépendants (sans interaction) et attachés aux sites du réseau discernables, donc $Z_{\text{cristal}} = [2 \text{ch}(\beta m_0 B)]^N$.

3/ **Équation d'état.**— L'aimantation est la variable conjuguée du champ magnétique, d'où $\overline{M}^c = -\frac{\partial F}{\partial B}$.

L'aimantation moyenne par spin est

$$m(T, B) = \frac{1}{N} \overline{M}^c = -\frac{1}{N} \frac{\partial F}{\partial B} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial B} \ln z_{\text{spin}} = m_0 \text{th}(\beta m_0 B) \quad (11)$$

$m(T, B) = m_0 \text{th}\left(\frac{m_0 B}{k_B T}\right)$ est l'équation d'état (comme $p(T, n) = nk_B T$ pour un gaz parfait).

Les isothermes sont tracées plus bas...

4/ $S^c = -k_B \sum_{\ell} P_{\ell}^c \ln P_{\ell}^c$ où $P_{\ell}^c = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_{\ell}}$. On trouve $S^c = k_B (\ln Z + \beta \overline{E}^c) = (\overline{E}^c - F)/T$.

5/ Application : dans le cristal, l'entropie par spin est

$$S(T, B) = k_B [-x \text{th} x + \ln(2 \text{ch} x)] \quad \text{où } x = \frac{m_0 B}{k_B T} \quad (12)$$

6/ **Transformation isotherme :**

a) **Travail** reçu le long de l'isotherme T pour aller de $B = 0$ à B :

$$W^{(T)}(0 \rightarrow B) = -m_0 \int_0^B dB' \text{th}(\beta m_0 B') = -k_B T \ln \text{ch}\left(\frac{m_0 B}{k_B T}\right) \quad (13)$$

b) **Chaleur** reçue (par spin) : $Q^{(T)}(0 \rightarrow B) = \Delta \varepsilon - W^{(T)}(0 \rightarrow B)$ où $\Delta \varepsilon = -mB - 0 = -k_B T x \text{th} x$, d'où

$$Q^{(T)}(0 \rightarrow B) = -k_B T \Phi(x) \quad \text{où } \Phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} x \text{th} x - \ln(\text{ch} x) \quad (14)$$

On peut aussi utiliser $Q = T \Delta S$ avec l'expression de l'entropie $S = k_B [\ln 2 - \Phi(x)]$ trouvée plus haut.

Les comportements limites de la fonction sont $\Phi(x) \simeq x^2/2$ pour $|x| \ll 1$ et $\Phi(x) \simeq \ln 2 - \mathcal{O}(|x| e^{-2|x|})$ pour $|x| \gg 1$ (elle est paire et *positive*).

7/ **Transformation isentropique.**— Aucune chaleur n'est échangée avec l'extérieur.

a) L'entropie est $S(T, B) = \text{fct}(B/T)$. Une transformation à $S = \text{cste}$ correspond à $B/T = \text{cste}$. Elle correspond donc aussi à $m(T, B) = \text{cste}$ (cf. figure plus bas).

b) Le travail reçu lors de la transformation isentropique allant de B_1 à B_2 est

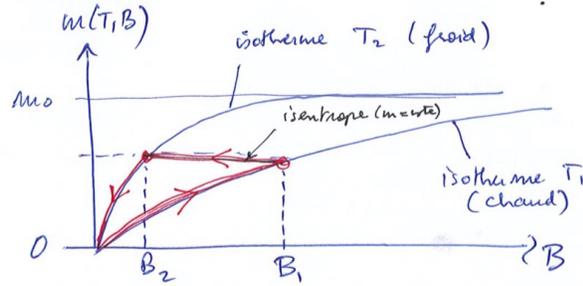
$$W^{(\text{isentropie})}(B_1 \rightarrow B_2) = -m(B_2 - B_1)$$

où $m = m(T_1, B_1) = m(T_2, B_2)$ (sur l'isentropie). En utilisant l'expression de $m(T, B)$, on déduit

$$W^{(\text{isentropie})}(B_1 \rightarrow B_2) = k_B T_1 x_1 \text{th} x_1 - k_B T_2 x_2 \text{th} x_2 \quad \text{avec } x_1 = \frac{m_0 B_1}{k_B T_1} \text{ et } x_2 = \frac{m_0 B_2}{k_B T_2}. \quad (15)$$

8/ **Cycle de Carnot.**— Nous étudions maintenant le cycle :

a) Cycle dans le diagramme (m, B) :



b) Le travail reçu par le système pendant le cycle est

$$\begin{aligned}
 W &= - \oint dB m = \overbrace{-k_B T_1 \ln \operatorname{ch}(x_1)}^{W^{(T_1)}(0 \rightarrow B_1)} + \overbrace{k_B T_1 x_1 \operatorname{th} x_1 - k_B T_2 x_2 \operatorname{th} x_2}_{W^{(\text{isentropie})}(B_1 \rightarrow B_2)} + \overbrace{k_B T_2 \ln \operatorname{ch}(x_2)}^{W^{(T_2)}(B_2 \rightarrow 0) = -W^{(T_2)}(0 \rightarrow B_2)} \\
 &= k_B T_1 \Phi(x_1) - k_B T_2 \Phi(x_2). \tag{16}
 \end{aligned}$$

c) Le système reçoit $Q_f = k_B T_2 \Phi(x_2) > 0$ depuis la source froide (il prend de l'énergie à la source froide, donc *il la refroidit*).

d) L'efficacité du cycle est définie par ce qui est utile divisé par le coût :

$$\eta_{\text{frigo}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q_f}{W} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{T_f}{T_c - T_f}. \tag{17}$$

On a retrouvé l'expression bien connue.