Mathématiques pour la Physique II

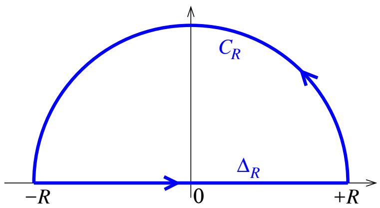
TD 6 : Lemmes de Jordan

Exercice 1 : Intégrale dans le plan complexe (*)

On étudie l'intégrale de la fonction

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z+\mathrm{i}\,a)^2} \qquad , \text{ avec } a > 0\,,$$

sur le contour fermé $\Delta_R \cup \mathscr{C}_R$, où $\Delta_R = [-R, +R]$ et $\mathscr{C}_R$ est le demi-cercle.



1 – Quel est le domaine d'analyticité de la fonction f si $a > 0$?

2 – Utiliser le lemme de Jordan pour montrer que $\int_{\mathscr{C}_R} \mathrm{d}z\, f(z) \to 0$ lorsque $R \to \infty$.

3 – Déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{(x+\mathrm{i}\,a)^2}$.

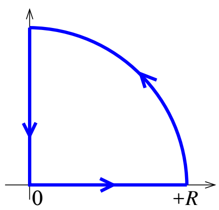
4 – Peut-on utiliser le même argument si $a < 0$?

Exercice 2 : Relation entre deux intégrales

On montre comment utiliser le théorème de Cauchy pour relier deux intégrales de natures différentes. On étudie l'intégrale

$$\oint_\Gamma \mathrm{d}z\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(\lambda+z)^2} \qquad , \text{ avec } \lambda > 0 \tag{1}$$

sur le contour Γ fermé :



1 – Utiliser le lemme de Jordan pour montrer que l'intégrale sur l'arc de cercle tend vers zéro quand $R \to \infty$.

2 – Écrire soigneusement les contributions des deux autres parties du contour Γ (les deux segments). Déduire la relation

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, \frac{\cos x}{(\lambda+x)^2} = 2\lambda \int_0^\infty \mathrm{d}x\, \frac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{(\lambda^2+x^2)^2} \tag{2}$$

On notera $F(\lambda)$ la fonction définie par ces deux intégrales.

3 – Quel est l'intérêt de la relation (2) ?

Un autre intérêt apparaît si l'on recherche les comportements limites de la fonction $F(\lambda)$. Faire un changement de variable $x = \lambda t$ dans les deux formes intégrales.

(a) Quelle forme est la plus appropriée pour obtenir le comportement pour $\lambda \to 0$?

(b) Et pour $\lambda \to \infty$?

4 – Facultatif (pour les courageux ou les enthousiastes) : par la même méthode, en étudiant $g(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}/(\lambda + z)$, montrer que

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x \, \frac{\sin x}{\lambda + x} = \lambda \int_0^\infty \mathrm{d}x \, \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\lambda^2 + x^2} \tag{3}$$

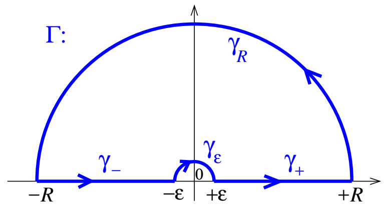
(l'intégrale sur le quart de arc de cercle sera plus délicate à borner dans ce cas : cf. le TD 5 où un cas analogue a été traité).

Exercice 3 : Intégrale du sinus cardinal sur $\mathbb{R}$ (*)

Soit la fonction $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}$.

1 – Montrer qu'elle est holomorphe sur un ouvert $\mathscr{U}$ qu'on précisera.

2 – On considère le contour $\Gamma = \gamma_- \cup \gamma_\varepsilon \cup \gamma_+ \cup \gamma_R$ représenté ci-dessous :



Paramétrer *soigneusement* les quatre parties du contour et écrire les contributions des différentes parties du contour à l'intégrale $\oint_\Gamma \mathrm{d}z \, f(z)$.

3 –

(a) Que vaut $\oint_\Gamma f(z) \, \mathrm{d}z$? Justifier votre réponse.

(b) Montrer que $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) \, \mathrm{d}z = -\mathrm{i}\pi$

(c) Montrer que $\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) \, \mathrm{d}z = 0$.

4 – En déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x = \pi$.