Université Paris-Saclay **Année 2019–2020**
Licences L3 PAPP & PMEC

Mathématiques pour la Physique II

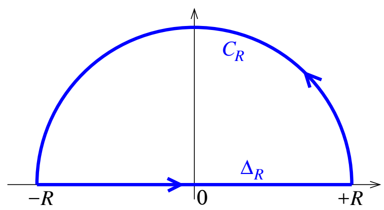
TD 6 : Lemmes de Jordan

Exercice 1 : Intégrale dans le plan complexe

On étudie l'intégrale de la fonction

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z+\mathrm{i}\,a)^2} \qquad , \text{ avec } a > 0\,,$$

sur le contour $\Delta_R \cup \mathscr{C}_R$, où $\Delta_R = [-R, +R]$ et $\mathscr{C}_R$ est le demi-cercle.



1 – Utiliser le lemme de Jordan pour borner $\int_{\mathscr{C}_R} \mathrm{d}z\, f(z)$.

2 – Déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{(x+\mathrm{i}\,a)^2}$.

Exercice 2 : Relation entre deux intégrales

1 – Montrer que

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, \frac{\cos x}{(\lambda+x)^2} = 2\lambda \int_0^\infty \mathrm{d}x\, \frac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{(\lambda^2+x^2)^2} \qquad (1)$$

Indication : considérer l'intégrale de la fonction $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}/(\lambda+z)^2$ sur un contour fermé approprié.

2 – Quel est l'intérêt de la relation ? Déduire les comportements limites (pour $\lambda \to 0$ et $\lambda \to \infty$) de l'intégrale.

3 – Facultatif : par la même méthode, en étudiant $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}/(\lambda+z)$, montrer que

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, \frac{\sin x}{\lambda+x} = \lambda \int_0^\infty \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\lambda^2+x^2} \qquad (2)$$

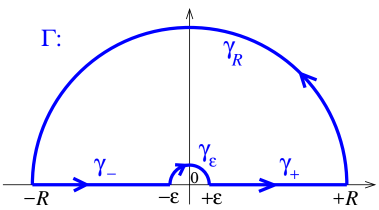
(on devra considérer une intégrale sur un arc de cercle, plus délicate à borner dans ce cas).

Exercice 3 : Intégrale du sinus cardinal sur $\mathbb{R}$

Soit la fonction $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}$.

1 – Montrer qu'elle est holomorphe sur un ouvert Ω qu'on précisera.

2 – On considère le contour $\Gamma = \gamma_- \cup \gamma_\varepsilon \cup \gamma_+ \cup \gamma_R$ représenté ci-dessous :



Paramétrer les quatre parties du contour.

3 – Que vaut $\int_\Gamma f(z)\ \mathrm{d}z$? Justifier votre réponse. Que valent les limites suivantes ?

(a) $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\ \mathrm{d}z$

(b) $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\ \mathrm{d}z$.

4 – En déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x = \pi$.

Exercice 4 : Transformée de Fourier de la Lorentzienne (facultatif)

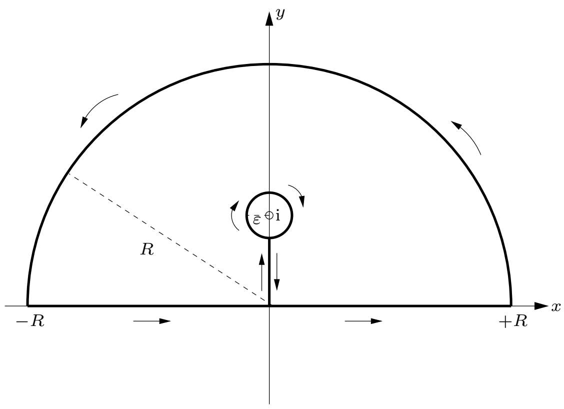
On considère la fonction de la variable complexe z

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}}{1+z^2} \quad , \tag{3}$$

où k est un réel positif.

1 – Sur quel domaine du plan complexe $f(z)$ est-elle holomorphe ?

2 – Que vaut $\int_\gamma \mathrm{d}z\ f(z)$? avec γ le chemin fermé défini sur la figure :



3 – On décompose γ en trois chemins. γ_1 est le segment de l'axe réel reliant $-R$ à R, γ_2 le demi-cercle de centre l'origine et de rayon R et γ_3 le cercle de centre i et de rayon ε. Exprimer $\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z$ en fonction des intégrales sur les chemins γ_1, γ_2 et γ_3, en précisant l'orientation des contours.

4 – Montrer que la contribution de γ_2 s'annule quand $R \to \infty$.

5 – Expliciter la contribution de γ_3, et prendre la limite $\varepsilon \to 0$ (on pourra utiliser le théorème de convergence dominée).

6 – En déduire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \pi \mathrm{e}^{-k} \quad . \tag{4}$$

Comment devrait-on adapter le calcul pour $k < 0$?