Mathématiques pour la Physique II

TD 7 : Singularités et résidus

Exercice 1 : Pôles et résidus

Identifier et caractériser les singularités z_k des fonctions suivantes. En calculer les résidus.

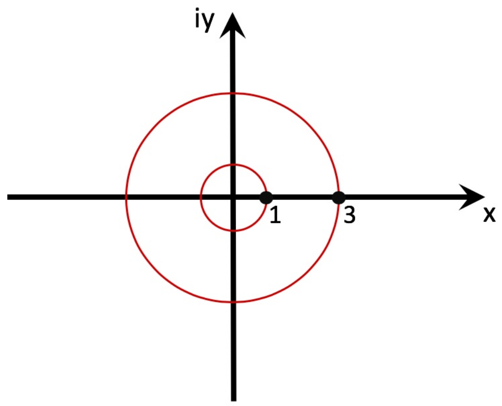
$$f_1(z) = \frac{1}{1+z^n} \quad (\textit{indication : voir le TD4}; \; Res(f_1, z_k) = -z_k/n),$$
$$f_2(z) = \frac{1}{\sin(z)} \quad (\textit{indication} : Res(f_2, z_k) = (-1)^k),$$
$$f_3(z) = \mathrm{e}^{-1/z^2},$$
$$f_4(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z(z-2\mathrm{i})^2} \quad (\textit{indication} : Res(f_4, 2i) = 3e^{-2}/4),$$
$$f_5(z) = \frac{\cos z}{z[z^4 + (1-\pi^2)z^2 - \pi^2]} \quad (\textit{facultatif}),$$
$$f_6(z) = \frac{1}{1-z^n} \quad (\textit{facultatif}).$$

Exercice 2 : Développement en série de Laurent

1 – Donner le développement de Laurent dans $\mathbb{C}^*$, centré sur l'origine $z = 0$, de la fonction $f(z) = \mathrm{e}^z/z^2$. Commenter votre résultat.

2 – Donner les développements de Laurent dans les régions $|z| < 1$; $1 < |z| < 3$; $|z| > 3$ (voir la figure ci-dessous) de la fonction :

$$g(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 3}.$$

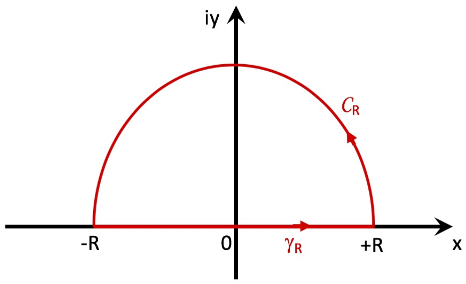


3 – Donner le développement de Laurent de g dans la couronne $0 < |z-1| < 2$.
Comparer avec le développement dans la couronne $1 < |z| < 3$ (comparer les résidus).

Exercice 3 : Théorème des résidus

1 – En utilisant le contour proposé ci-dessous, calculer l'intégrale

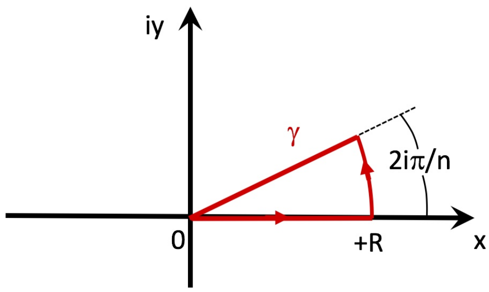
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{(x-\mathrm{i}\,a)^2}\mathrm{d}x\,, \qquad \text{avec } a>0\,. \tag{1}$$



Comparer à l'intégrale du TD6. On pourra discuter $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{(x-\mathrm{i}\,a)^2}\mathrm{d}x$ selon le signe de k.

2 – En utilisant le contour proposé ci-dessous, montrer que

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}=\frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)} \qquad (\text{pour } n\in\mathbb{N},\quad n\geqslant 2) \tag{2}$$



3 – (Exercice plus difficile.) Soit la fonction

$$C(\lambda,\theta)=\frac{\sinh\lambda}{\cosh\lambda-\cos\theta} \qquad \text{avec } \lambda>0\,. \tag{3}$$

Nous étudions sa décomposition de Fourier (discrète) $C(\lambda,\theta)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}C_n(\lambda)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{\cosh\lambda-\cos\theta}=\frac{e^{-|n|\lambda}}{\sinh\lambda}\,. \tag{4}$$

Indications :

- On considèrera le cas $n\geqslant 0$ (le résultat pour $n<0$ sera déduit par symétrie).
- Convertir l'intégrale sur $[0,2\pi]$ en intégrale sur le cercle unité centré sur l'origine.

Vérifier le résultat en calculant directement la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}}C_n(\lambda)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$.

Commentaire : Cette fonction apparaît dans le contexte de l'étude du **transport quantique** des électrons dans un anneau métallique de dimension mésoscopique (de périmètre $L \sim 1\ \mu$m). Elle contrôle la ≪ *correction de localisation faible* ≫ à la conductance, donnée par $C(L/L_\varphi, \theta)$ où L_φ est la longueur de cohérence de phase et $\theta = 4\pi\phi/\phi_0$ le rapport du flux magnétique par le quantum de flux $\phi_0 = h/e$. Ces oscillations quantiques sont appelées ≪ oscillations AAS ≫ et ont été prédites dans un article célèbre par B. Al'tshuler, A. Aronov & B. Spivak (JETP Lett. **33**, p. 94, 1981). Elles ont été observées expérimentalement par D. Sharvin & Yu. Sharvin (JETP Lett. **35**, p. 588, 1982) pour une autre géométrie (cylindre).