

Mathématiques pour la Physique II

TD 7 : Singularités et résidus

Exercice 1 : Pôles et résidus

Identifier et caractériser les singularités des fonctions suivantes. En calculer les résidus.

$$\begin{aligned}f_1(z) &= \frac{1}{1+z^n}, \\f_2(z) &= \frac{1}{\sin(z)}, \\f_3(z) &= e^{-1/z^2}, \\f_4(z) &= \frac{1}{1-z^n}, \\f_5(z) &= \frac{\cos z}{z[z^4 + (1-\pi^2)z^2 - \pi^2]}, \\f_6(z) &= \frac{e^{iz}}{z(z-2i)^2}.\end{aligned}$$

Exercice 2 : Développement en série de Laurent

1 – Donner le développement de Laurent dans \mathbb{C}^* , centré sur l'origine $z = 0$, de la fonction $f(z) = e^z/z^2$.

2 – Donner les développements de Laurent dans les régions $|z| < 1$; $1 < |z| < 3$; $|z| > 3$ de la fonction :

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 3}.$$

Exercice 3 : Théorème des résidus

1 – En choisissant un contour fermé adapté, calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{ix}}{(x-ia)^2}, \quad \text{avec } a > 0. \quad (1)$$

Comparer à l'intégrale du TD3. On pourra discuter $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{ikx}}{(x-ia)^2}$ selon le signe de k .

2 – En choisissant un contour approprié, calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} \quad (\text{pour } n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2) \quad (2)$$

(rq : les racines de $z^n + 1$ ont été étudiées au TD1).

3 – Soit la fonction

$$C(\lambda, \theta) = \frac{\sinh \lambda}{\cosh \lambda - \cos \theta} \quad \text{avec } \lambda > 0. \quad (3)$$

Nous étudions sa décomposition de Fourier (discrète) $C(\lambda, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(\lambda) e^{in\theta}$. Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{e^{in\theta}}{\cosh \lambda - \cos \theta}. \quad (4)$$

Indications :

- on considèrera le cas $n \geq 0$ (le résultat pour $n < 0$ sera déduit par symétrie).
- Convertir l'intégrale sur $[0, 2\pi]$ en intégrale sur le cercle unité centré sur l'origine.

Vérifier le résultat en calculant directement la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(\lambda) e^{in\theta}$.

Commentaire : Cette fonction apparaît dans le contexte de l'étude du **transport quantique** des électrons dans un anneau métallique de dimension mésoscopique (de périmètre $L \sim 1 \mu\text{m}$). Elle contrôle la « *correction de localisation faible* » à la conductance, donnée par $C(L/L_\varphi, \theta)$ où L_φ est la longueur de cohérence de phase et $\theta = 4\pi\phi/\phi_0$ le rapport du flux magnétique par le quantum de flux $\phi_0 = h/e$. Ces oscillations quantiques sont appelées « oscillations AAS » et ont été prédites dans un article célèbre par B. Al'tshuler, A. Aronov & B. Spivak (JETP Lett. **33**, p. 94, 1981). Elles ont été observées expérimentalement par D. Sharvin & Yu. Sharvin (JETP Lett. **35**, p. 588, 1982) pour une autre géométrie (cylindre).