Mathématiques pour la Physique II

TD 8 : Applications du théorème des résidus

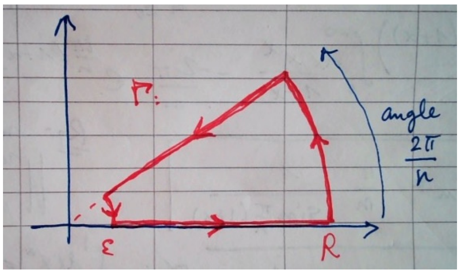
Exercice 1 : Calcul d'intégrales

Nous calculons diverses intégrales, en utilisant l'intégration dans le plan complexe.

1 – On considère

$$I(\alpha, n) = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

- À quelle condition sur α et n l'intégrale est-elle convergente ?
- Quel est le domaine d'analyticité de la fonction $f(z) = \frac{z^\alpha}{1+z^n}$?
- On étudie l'intégrale $\oint_\Gamma \mathrm{d}z\, f(z)$ sur le contour suivant



- Déduire $I(\alpha, n)$. Vérifier votre résultat en considérant les limites $\alpha \to 0$ (cf. TD7) et $n \to \infty$.

2 – Soit l'intégrale

$$J(a) = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \frac{1}{a - \cos\theta} \qquad \text{(pour } a > 1\text{)} \tag{2}$$

- En posant $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, transformer l'intégrale en intégrale sur le cercle unité d'une fonction méromorphe $f(z)$ (une fonction méromorphe est une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ privé d'un ou plusieurs points).
- Déterminer $z_\pm$, les deux racines de $P(z) = 2az - z^2 - 1$.
- Justifier que l'intégrale correspond au résidu d'un des deux pôles de f.
- Vérifier votre résultat en discutant la limite $a \to \infty$.

3 – Sur le même principe : calculer

$$K(a) = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \frac{1}{(a - \cos\theta)^2} \qquad \text{(pour } a > 1\text{)} \tag{3}$$

Retrouver le résultat d'une manière plus directe (en utilisant la relation entre $J(\alpha)$ et $K(\alpha)$).

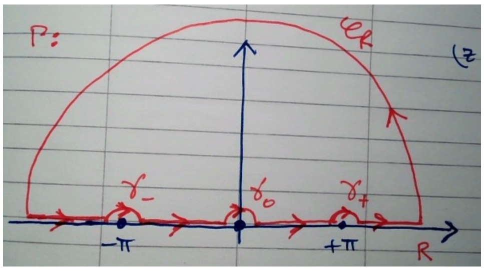
4 – On souhaite calculer l'intégrale

$$I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \frac{\sin x}{x\,[x^4 + (1-\pi^2)x^2 - \pi^2]}\,. \tag{4}$$

• Pour cela, on étudie l'intégrale de la fonction

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z\,(z^2-\pi^2)(z^2+1)} \tag{5}$$

sur le contour



• Calculer les résidus des pôles de f.
• Montrer que $\lim_{R\to\infty}\int_{\mathscr{C}_R}\mathrm{d}z\,f(z) = 0$.
• Les trois demi-cercles γ_0 et $\gamma_\pm$ on un rayon ε. Montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_0}\mathrm{d}z\,f(z) = -\mathrm{i}\pi\,\mathrm{Res}[f,0] \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_\pm}\mathrm{d}z\,f(z) = -\mathrm{i}\pi\,\mathrm{Res}[f,\pm\pi]\,. \tag{6}$$

• Déduire que

$$I_4 = \frac{\pi^2(\mathrm{e}^{-1}-1)-2}{\pi\,(\pi^2+1)}\,. \tag{7}$$

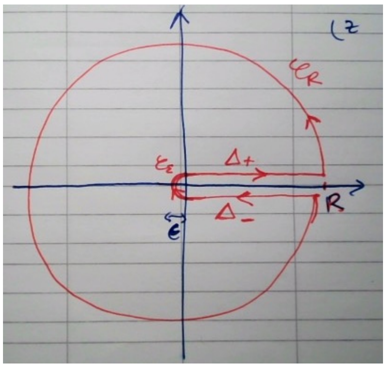
5 – Pour terminer, nous calculons l'intégrale

$$I_5 = \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

À cette fin, on étudie l'intégrale de

$$f(z) = \frac{(\ln z)^2}{z^3+1} \tag{9}$$

sur le contour $\Gamma = \Delta_+\cup\mathscr{C}_R\cup\Delta_-\cup\mathscr{C}_\varepsilon$:



- Quel est le domaine d'analyticité de f ? Où doit-on placer la coupure ?
- Trouver les trois pôles z_0, z_1 et z_2 de la fonction f.
- Montrer que $\lim_{R\to\infty}\int_{\mathscr{C}_R}\mathrm{d}z\, f(z)=0$ et $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathscr{C}_\varepsilon}\mathrm{d}z\, f(z)=0$.
- En considérant la limite $R\to\infty$ et $\varepsilon\to 0$ de $\oint_\Gamma \mathrm{d}z\, f(z)$, déduire l'identité

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\,\frac{\ln x}{1+x^3}+\mathrm{i}\pi\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}=\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{2} z_k\,(\ln z_k)^2 \tag{10}$$

- Vérifier votre résultat en retrouvant la valeur de $\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$ (intégrale $I(\alpha,n)$ ou TD7) et donner la valeur de I_5.

Exercice 2 : Calcul de séries

1 – Calculer la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2} \tag{11}$$

Indication : considérer l'intégrale de la fonction $\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2+a^2}$ sur un cercle de rayon $R\to\infty$.

Vérifier votre résultat en discutant la limite $a\to 0$.

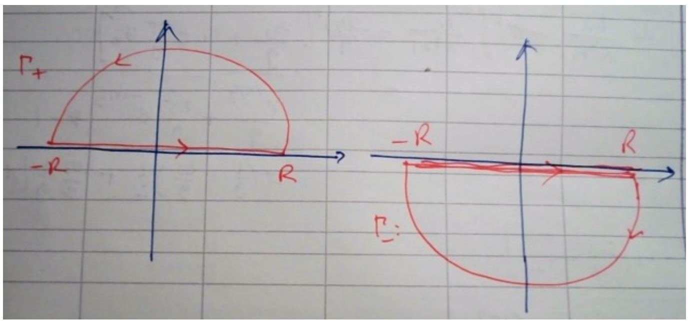
2 – (Facultatif) En utilisant la fonction $f(z)=\dfrac{1}{z^4\sin\pi z}$, prouver que :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}=-\frac{7\pi^4}{720}\,.$$

Exercice 3 : Application à la TF

1 – On introduit la fonction $f(x)=\frac{1}{x^2+a^2}$.

a) Calculer $\mathcal{F}_k[f(x)]$ en utilisant le théorème des résidus.
Indication : suivant le signe de k, considérer l'intégrale de $f(z)=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}}{z^2+a^2}$ sur l'un des deux contours



b) (*Facultatif*) Déduire $\mathcal{F}_k[xf(x)]$.

c) (*Facultatif*) Calculer $\mathcal{F}_k[f(x)^2]$.
Suggestion : Utiliser soit l'intégration dans le plan complexe, soit la dérivation sous le signe $\int$ pour relier $\mathcal{F}_k[f(x)^2]$ et $\mathcal{F}_k[f(x)]$.

2 – Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$\psi(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2} \tag{12}$$

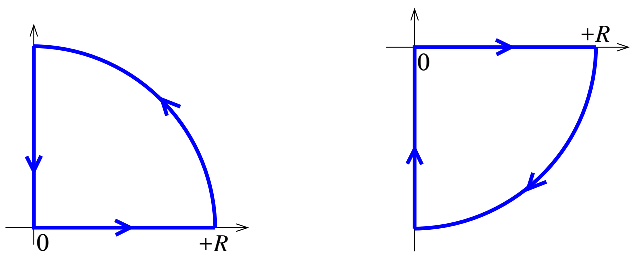
Indication : considérer l'intégrale de la fonction $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}}{z^2-2z+2}$ sur les contours $\Gamma_\pm$ et utiliser le théorème des résidus

3 – On considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^{-\alpha} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases} \tag{13}$$

a) Discuter la convergence de l'intégrale $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{-\alpha}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$.

b) En étudiant l'intégrale de la fonction de la variable complexe $\varphi(z) = z^{-\alpha}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}$ sur l'un ou l'autre des deux contours suivant, déduire $\hat{f}(k) = \mathcal{F}_k[f]$:



Indication : On rappelle la définition de la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(a) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, t^{a-1}\, \mathrm{e}^{-t}$.

c) (*Facultatif*) Si la loi de puissance caractérise seulement le comportement asymptotique de la fonction, $\psi(x) \sim x^{-\alpha}$ pour $x \to +\infty$, y a-t-il une relation entre $\hat{\psi}(k)$ et $\hat{f}(k)$? Pour $k \to 0$ ou $k \to \infty$?