Université Paris-Saclay — Année 2019–2020
Licences L3 PAPP & PMEC

Mathématiques pour la Physique II

TD 8 : Applications du théorème des résidus

Exercice 1 : Calcul de séries

1 – Calculer la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} \tag{1}$$

Indication : considérer la fonction $\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2+a^2}$.

Vérifier votre résultat en faisant $a \to 0$.

2 – En utilisant la fonction $f(z) = \dfrac{1}{z^4 \sin \pi z}$, prouver que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} = -\frac{7\pi^4}{720}\,.$$

Exercice 2 : Calcul d'intégrales

Calculer les intégrales suivantes, en utilisant l'intégration dans le plan complexe :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \qquad (\text{pour } n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2, \quad n > 1+\alpha > 0)\,,$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\alpha\cos\theta} \qquad (\text{pour } -1 < \alpha < +1)$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(a+\cos\theta)^2} \qquad (\text{pour } a > 1)$$

$$I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x[x^4+(1-\pi^2)x^2-\pi^2]}\,\mathrm{d}x\,,$$

$$I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x \qquad (\text{on intègrera la fonction } \frac{(\ln z - c)^2}{1+z^3} \text{ où } c \text{ est une constante } \textit{ad hoc})\,.$$

Exercice 3 : Application à la TF

1 – On introduit la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$.

a) Calculer $\mathcal{F}_k[f(x)]$.

b) Déduire $\mathcal{F}_k[xf(x)]$.

c) Calculer $\mathcal{F}_k[f(x)^2]$.

Suggestion : Utiliser la dérivation sous le signe $\int$ pour relier $\mathcal{F}_k[f(x)^2]$ et $\mathcal{F}_k[f(x)]$.

2 – Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2} \tag{2}$$

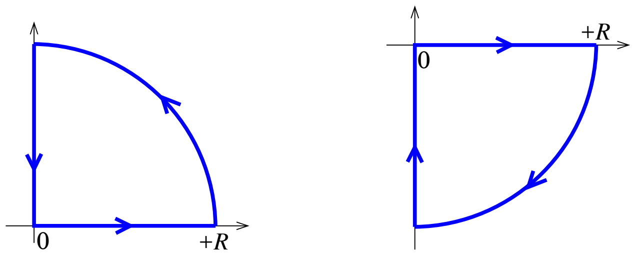
Indication : utiliser le théorème des résidus

3 – On considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^{-\alpha} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases} \tag{3}$$

a) Discuter la convergence de l'intégrale $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{-\alpha}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$.

b) En étudiant l'intégrale de la fonction de la variable complexe $\varphi(z) = z^{-\alpha}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}$ sur l'un ou l'autre des deux contours suivant, déduire $\hat{f}(k) = \mathcal{F}_k[f]$:



Indication : On rappelle la définition de la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(a) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, t^{a-1}\,\mathrm{e}^{-t}$.

c) Si la loi de puissance caractérise seulement le comportement asymptotique de la fonction, $\psi(x) \sim x^{-\alpha}$ pour $x \to +\infty$, y a-t-il une relation entre $\hat{\psi}(k)$ et $\hat{f}(k)$? Pour $k \to 0$ ou $k \to \infty$?