CORRECTION DE L'EXAMEN PARTIEL DE MATHÉMATIQUES
Lundi 1 mars 2021

Exercice 1 : Séries de Fourier

A. Questions de cours

Soit une fonction $f(x)$ périodique de période 2π, décomposable en série de Fourier

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, e^{inx} \tag{1}$$

1/ $f(x) \in \mathbb{R}$, donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^*\, e^{-inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{-n}^*\, e^{inx}$ d'où $c_n = c_{-n}^*$.
De même $f(-x) = f(x)$ conduit à $c_n = c_{-n}$.
En combinant les deux propriétés, on voit donc que les coefficients sont réels et symétriques.

2/ En utilisant la symétrie des coefficients :

$$f(x) = c_0 + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} c_n\, e^{inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, (e^{inx} + e^{-inx}) \tag{2}$$

qu'on identifie avec

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, \cos(nx) \tag{3}$$

en posant $b_0 = c_0$ et $b_n = 2c_n$.

3/ En cours, on a montré que $c_n = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2\pi}\, f(x)\, e^{-inx}$, d'où

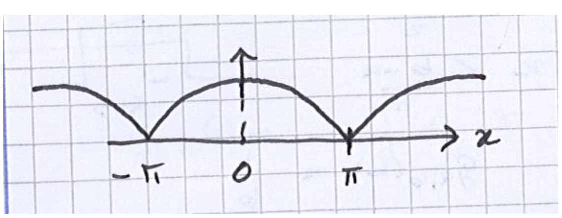
$$b_0 = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\pi}\, f(x) \qquad \text{et} \qquad b_n = 2\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\pi}\, f(x)\, \cos(nx) \tag{4}$$

où l'on a utilisé la symétrie de la fonction.

B. Application

On considère la fonction $f(x) = 1 - \left(\frac{x}{\pi}\right)^2$ définie sur l'intervalle $x \in [-\pi, \pi]$.

2/ On souhaite représenter $f(x)$ par une série de Fourier (1). Pour cela on étend le domaine de définition de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ tout entier en considérant que $f(x)$ est périodique de période 2π.

a) 

$f(x)$ est continue $\forall x$
mais $f'(x)$ est discontinue en $x = \pm\pi$.

b) Calculons les coefficients de Fourier b_0 et b_n :

$$b_0 = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\pi} \left[1 - \left(\frac{x}{\pi}\right)^2\right] = \int_0^1 \mathrm{d}u\,(1-u^2) = \frac{2}{3} \tag{5}$$

et

$$b_n = 2\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\pi} \cos(nx) \left[1 - \left(\frac{x}{\pi}\right)^2\right] = -\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\pi}\, x^2 \cos(nx) = -\frac{4(-1)^n}{(\pi n)^2} \tag{6}$$

(après deux I.P.P).
La série de Fourier prend la forme

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)} \tag{7}$$

c) On a

$$f(0) = 1 = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \qquad \text{d'où} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \tag{8}$$

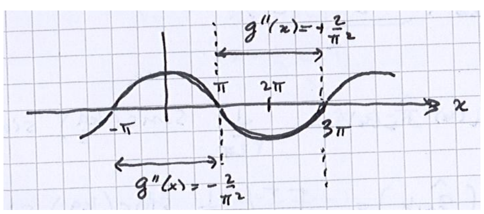
$$f(\pi) = 0 = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \text{d'où} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{9}$$

d) Le comportement $|b_n| \sim 1/n^2$ est relié à la discontinuité de la dérivée de f en $\pm\pi$.

3/ (Bonus) On aurait pu prolonger la fonction de départ en considérant une fonction de période 4π

$$g(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x}{\pi}\right)^2 & \text{sur } [-\pi, +\pi] \\ -1 + \left(\frac{x-2\pi}{\pi}\right)^2 & \text{sur } [\pi, 3\pi] \end{cases} \tag{10}$$

dont la dérivée est continue, mais la dérivée seconde est discontinue.



D'après le théorème vu en cours, cette fonction est associée à des coefficients de Fourier décroissant comme $\tilde{c}_n \sim 1/n^3$.

Exercice 2 : Transformation de Fourier

A. Questions de cours

cf. cours.

B. Autour de la fonction porte

On considère la fonction :

$$\Pi_a(x) = \begin{cases} 1/a & \text{si } |x| < a/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{11}$$

1/ On a $\int_{\mathbb{R}} \Pi_a = 1 \ \Rightarrow\ \Pi_a \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$

2/

$$\widehat{\Pi}_a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \Pi_a(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a/2}^{+a/2} \mathrm{d}x\, \frac{1}{a}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \tag{12}$$

donc

$$\boxed{\widehat{\Pi}_a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}(ka/2)} \tag{13}$$

Vérif. : $\widehat{\Pi}_a(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ (Ok, puisque $\int_{\mathbb{R}} \Pi_a = 1$).

3/ $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, x^n = \infty$, donc elle n'est pas dans $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. En revanche, $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, f_n(x) = \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x\, x^n < \infty$, donc $f_n \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$.

4/ On utilise la propriété de la question de cours, $\mathcal{F}_k[x\, f(x)] = \mathrm{i}\, \hat{f}'(k)$, donc

$$\hat{f}_n(k) = \left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\right)^n \widehat{\Pi}_a(k) \tag{14}$$

On peut utiliser cette relation pour calculer la dérivée n-ème au point $k = 0$:

$$\left[\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\right)^n \widehat{\Pi}_a(k)\right]_{k=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\right)^n \operatorname{sinc}(ka/2)\right]_{k=0} = \mathcal{F}_{k=0}[x^n\, \Pi_a(x)] = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}}\, x^n\, \Pi_a(x) \tag{15}$$

cette dernière intégrale est élémentaire. On trouve

$$\left[\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\right)^n \operatorname{sinc}(ka/2)\right]_{k=0} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{a}{2}\right)^n \qquad \text{pour } n \text{ pair,} \tag{16}$$

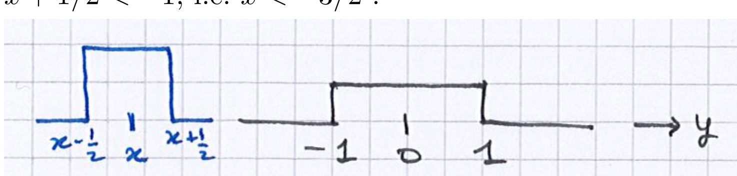
et 0 pour n impair. Autrement dit :

$$\boxed{\operatorname{sinc}^{(2m)}(0) = \frac{(-1)^m}{2m+1}} \quad \text{et} \quad \operatorname{sinc}^{(2m+1)}(0) = 0\,. \tag{17}$$

5/ On introduit $g_{a,b} \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_a * \Pi_b$ où a, b sont deux réels positifs.

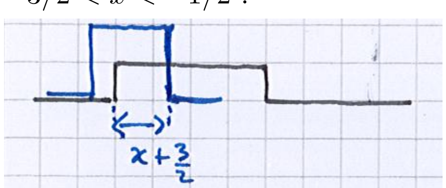
On commence par déterminer $g_{1,2}(x) = \int \mathrm{d}y\, \Pi_1(x-y)\, \Pi_2(y)$. Pour cela on trace les deux fonctions dans l'intégrale. On distingue trois cas :

(a) $x + 1/2 < -1$, i.e. $x < -3/2$:



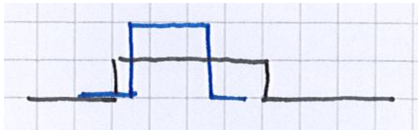
donc $g_{1,2}(x) = 0$.

(b) $-3/2 < x < -1/2$:



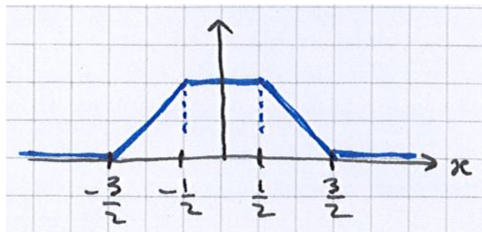
donc $g_{1,2}(x) = \frac{1}{2}(x + 3/2)$.

(c) $-1/2 < x < 1/2$:

 donc $g_{1,2}(x) = 1/2$.

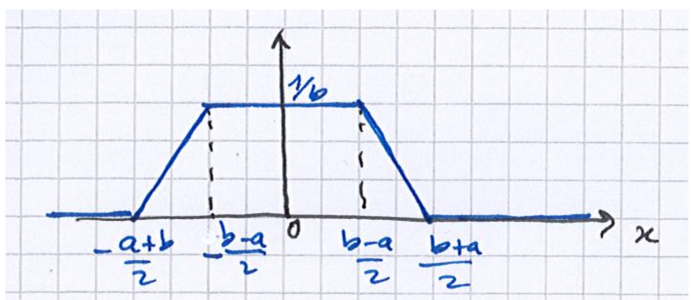
(d) on utilise la symétrie de la fonction.

Finalement, la fonction $g_{1,2}(x)$ est :



6/ On procède de la même manière dans le cas général (pour $a < b$) :

$$g_{a,b}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{b+a}{2} \\ \frac{1}{ab}\left(\frac{b+a}{2} + x\right) & \text{si } -\frac{b+a}{2} < x < -\frac{b-a}{2} \\ \frac{1}{b} & \text{si } -\frac{b-a}{2} < x < \frac{b-a}{2} \\ \frac{1}{ab}\left(\frac{b+a}{2} - x\right) & \text{si } \frac{b-a}{2} < x < \frac{b+a}{2} \\ 0 & \text{si } x > \frac{b+a}{2} \end{cases} \tag{18}$$



7/ $\hat{g}_{a,b}(k) = \mathcal{F}_k[g_{a,b}] = \sqrt{2\pi}\,\widehat{\Pi}_a(k)\widehat{\Pi}_b(k)$.

D'après le théorème d'inversion, $\mathcal{F}_x^\dagger[\hat{g}_{a,b}] = g_{a,b}(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ (comme $g_{a,b}(x)$ est continue, on a $\mathcal{F}_x^\dagger[\mathcal{F}[g_{a,b}]] = g_{a,b}(x)\ \forall\, x$; ici c'est même un peu plus fort : comme $\hat{g}_{a,b} \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R})$, l'inversion redonne $g_{a,b}(x)\ \forall\, x$).

8/ Écrivons

$$g_{a,b}(x) = \mathcal{F}_x^\dagger[\hat{g}_{a,b}] = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{ka}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{kb}{2}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tag{19}$$

et faisons $x = 0$. On déduit

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}k \operatorname{sinc}\left(\frac{ka}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{kb}{2}\right) = 2\pi\, g_{a,b}(0) = \frac{2\pi}{\max(a,b)} \tag{20}$$

En posant $\alpha = a/2$ et $\beta = b/2$ on obtient finalement

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \frac{\sin(\alpha x)\sin(\beta x)}{x^2} = \pi \min(\alpha, \beta)} \tag{21}$$