EXAMEN PARTIEL DE MATHÉMATIQUES
Lundi 1 mars 2021

Durée de l'épreuve : **2 heures.**

L'utilisation de documents, téléphones portables, calculatrices, ... est interdite.

Recommandations :
Lisez attentivement l'énoncé et **rédigez** *succinctement* et *clairement* votre réponse.
n'oubliez pas de vous **relire**.

Exercice 1 : Séries de Fourier

A. Questions de cours

Soit une fonction $f(x)$ périodique de période 2π, décomposable en série de Fourier

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, e^{\mathrm{i}nx} \tag{1}$$

1/ Si $f(x)$ est réelle et symétrique, $f(-x) = f(x)$, montrer que les coefficients c_n sont réels et symétriques, $c_{-n} = c_n$.

2/ Montrer que dans ce cas, la décomposition de Fourier prend la forme

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, \cos(nx) \tag{2}$$

Etablir la relation entre les coefficients b_0 et b_n ($n \geqslant 1$) et les coefficients c_n.

3/ Rappeler comment obtenir le coefficient c_n de la décomposition (1) ; on démontrera la relation (si besoin, on admettra qu'il est licite de permuter somme et intégrale). Déduire

$$b_0 = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\pi}\, f(x) \qquad \text{et} \qquad b_n = 2\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\pi}\, f(x)\, \cos(nx)\,. \tag{3}$$

B. Application

On considère la fonction

$$f(x) = 1 - \left(\frac{x}{\pi}\right)^2 \qquad \text{définie pour } x \in [-\pi, \pi]\,. \tag{4}$$

1/ Tracer le graphe de la fonction $f(x)$, pour $x \in [-\pi, \pi]$.

2/ On souhaite représenter $f(x)$ par une série de Fourier (1). Pour cela on étend le domaine de définition de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ tout entier en considérant que $f(x)$ est périodique de période 2π.

a) Que pouvez vous dire de la dérivée de la fonction $f(x)$ ainsi prolongée sur $\mathbb{R}$, lorsque $x = \pm\pi$ (tracer la fonction périodique).

b) Calculer les coefficients de Fourier b_0 et b_n introduits dans la question de cours. Écrire explicitement la série de Fourier (2).

c) Déduire les valeurs des deux séries suivantes : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

d) Discuter de la décroissance de $|b_n|$ quand $n \to \infty$ et des propriétés de continuité et de dérivabilité de la fonction $f(x)$.

3/ (Bonus) Justifier que l'on peut construire une autre fonction périodique sur $\mathbb{R}$ à partir des mêmes arcs de parabole, de manière à obtenir une série de Fourier qui converge plus rapidement. En étudiant la continuité des dérivées de la nouvelle fonction, identifier la décroissance des coefficients c_n pour $n \to \infty$ (sans calcul et en utilisant un théorème du cours).

Exercice 2 : Transformation de Fourier

On rappelle la définition de la transformée de Fourier d'une fonction $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$,

$$\hat{f}(k) = \mathcal{F}_k[f] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}}\, f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \quad \text{et} \quad f(x) = \mathcal{F}_x^\dagger[\hat{f}] = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}k}{\sqrt{2\pi}}\, \hat{f}(k)\, \mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx} \text{ presque partout.} \tag{5}$$

A. Questions de cours

1/ Rappeler la définition de l'espace $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$.

Pour les deux questions suivantes, une <u>*brève*</u> démonstration est demandée :

2/ Exprimer $\mathcal{F}_k[x\, f(x)]$ en fonction de $\hat{f}(k)$.

3/ Exprimer $\mathcal{F}_k[(f * g)(x)]$ en fonction de $\hat{f}(k)$ et $\hat{g}(k)$.

Rappel : définition du produit de convolution de deux fonctions f et g, $(f * g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, f(x-y)g(y)$.

B. Autour de la fonction porte

On considère la fonction :

$$\Pi_a(x) = \begin{cases} 1/a & \text{si } |x| < a/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{6}$$

1/ Justifier que $\Pi_a \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$

2/ Calculer la transformée de Fourier $\widehat{\Pi}_a(k) = \mathcal{F}_k[\Pi_a]$.

3/ Soit n un entier positif. Est-ce que la fonction x^n est dans l'espace $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$? Et la fonction $f_n(x) = x^n\, \Pi_a(x)$? Justifiez la réponse.

4/ Reliez $\mathcal{F}_k[f_n]$ et $\mathcal{F}_k[\Pi_a]$. Utilisez ce résultat pour calculer la valeur de la n-ième dérivée

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right) \qquad \text{au point } x = 0\,.$$

5/ Soient a, $b \in \mathbb{R}^+$. La fonction $g_{a,b}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par la formule

$$g_{a,b} \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_a * \Pi_b\,. \tag{7}$$

Tracez le graphique de $g_{1,2}(x)$ sur l'intervalle $[-2, 2]$

indication : pour vous aider à déterminer $g_{1,2}(x)$, tracez $\Pi_1(x-y)$ et $\Pi_2(y)$.

6/ Montrez que $g_{a,b}$ est une fonction affine par morceaux et donnez en une formule explicite (on supposera $a \leqslant b$).

7/ Calculez $\hat{g}_{a,b}(k) = \mathcal{F}_k[g_{a,b}]$ et justifiez que $\mathcal{F}_x^\dagger[\hat{g}_{a,b}] = g_{a,b}(x)$.

8/ Utilisez ces résultats pour calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \frac{\sin(\alpha x)\sin(\beta x)}{x^2} \tag{8}$$

où α, $\beta > 0$.

SOLUTIONS SUR LA PAGE DU COURS : CF. `http://lptms.u-psud.fr/christophe_texier/`