Université Paris-Saclay **Année 2020–2021**

Licences L3 PAPP

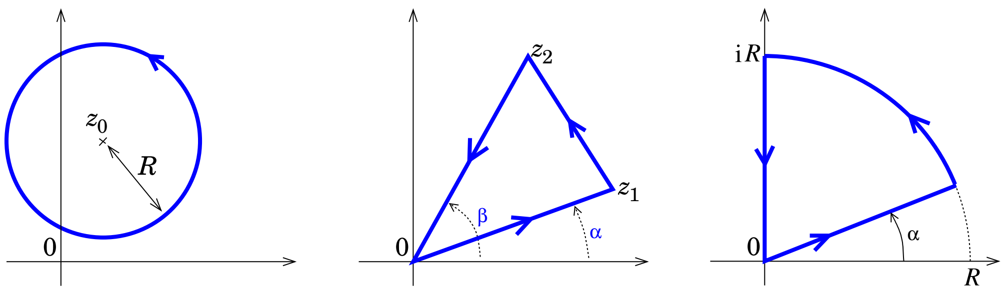
Mathématiques pour la Physique II

TD 5 : Théorème de Cauchy

Exercice 1 : Paramétrisation de contours (*)

Motivation : L'intégration d'une fonction analytique $f(z)$ le long d'un contour Γ du plan complexe peut être mise sous la forme de l'intégrale d'une fonction d'une variable réelle en paramétrant le contour Γ. Il s'agit en pratique de trouver une fonction $t \mapsto z(t) \in \Gamma$ de $[t_1, t_2] \to \mathbb{C}$. On calcule alors l'intégrale en utilisant : $\int_\Gamma \mathrm{d}z\, f(z) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\, f(z(t))$.

1 − On considère les contours suivants :



Pour chaque contour ou morceau de contour, donner la paramétrisation $z(t)$ et déduire $\mathrm{d}z(t)$ (rq : il n'y a pas un choix unique).

2 − On note Γ l'arc de parabole $x = y^2$ avec $y \in [0, y_0]$. Paramétrer Γ puis calculer l'intégrale de contour $\int_\Gamma \mathrm{d}z\, z^2$ suivant la méthode exposée dans le paragraphe d'introduction.

Indication : Vérifier que $\int_\Gamma \mathrm{d}z\, z^2 = \frac{1}{3} z_0^3$ où z_0 est l'extrémité de la parabole. Commenter.

Exercice 2 : Quelques intégrales sur $\mathbb{C}$

1 − Calculer l'intégrale curviligne $\int z\, \mathrm{d}z$ sur le quart de cercle de centre $1 + \mathrm{i}$ et de rayon 1 joignant les points $z_1 = 2 + \mathrm{i}$ à $z_2 = 1 + 2\mathrm{i}$. Vérifier que $f(z)$ est holomorphe et retrouver le résultat précédent en utilisant cette propriété.

2 − **(*)** Calculer l'intégrale

$$\oint_{\mathcal{C}_R} \mathrm{d}z\, \bar{z} \tag{1}$$

où $\mathcal{C}_R$ est le cercle centré sur z_0 de rayon R (1er des trois contours de l'exercice 1). Comparer à $\oint_{\mathcal{C}_R} \mathrm{d}z\, z$.

Exercice 3 : Utilisation du théorème de Cauchy

1 – Intégrale de Fresnel (*)

a) Discuter la convergence de $\int_0^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$.

b) L'objectif est de calculer les deux intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{2}$$

à l'aide du théorème de Cauchy. Pour cela, on introduit la fonction $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}$ et nous étudions l'intégrale dans le plan complexe $\oint_{\Gamma_R} \mathrm{d}z\, f(z)$, où le contour est $\Gamma_R = \Delta_R \cup \mathscr{C}_{R,\pi/4} \cup \widetilde{\Delta}_R$ avec
(i) $\Delta_R = [0, R]$;
(ii) $\mathscr{C}_{R,\pi/4} = \{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \theta \in [0, \frac{\pi}{4}]\}$;
(iii) $\widetilde{\Delta}_R = \{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}, t \in [R, 0]\}$.

- Dessiner soigneusement le contour.
- Montrer que la contribution $\int_{\mathscr{C}_{R,\pi/4}} \mathrm{d}z\, f(z)$ tend vers 0 lorsque $R \to \infty$.

[Indication : doit-on utiliser un majorant $\sin\theta \leqslant \theta$ ou un minorant $\sin\theta \geqslant 2\theta/\pi$ sur $(0, \pi/2)$?]

- Écrire explicitement $\int_{\Delta_R} \mathrm{d}z\, f(z)$ et $\int_{\widetilde{\Delta}_R} \mathrm{d}z\, f(z)$.
- Déduire les relations (2).

2 – Transformée de Fourier de la gaussienne

Posons, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) .$$

2.1) Montrer que $f(z)$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Soit $R > 0$ et soit $y_0 \in \mathbb{R}^*$. Soit le chemin $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ parcouru dans le sens direct avec

— $\gamma_1 = [-R, +R]$;
— $\gamma_2 = [R, R + \mathrm{i}y_0]$;
— $\gamma_3 = [R + \mathrm{i}y_0, -R + \mathrm{i}y_0]$;
— $\gamma_4 = [-R + \mathrm{i}y_0, -R]$.

2.2) Montrer que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,; \qquad \text{et} \qquad \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{3}$$

2.3) En déduire, grâce à un choix pertinent de l'ordonnée y_0, que

$$\mathscr{F}[g](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, g(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} = g(k) \qquad \text{pour } g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \tag{4}$$

Exercice 4 : Intégrale de la gaussienne (facultatif)

1 – Calculer le jacobien du changement de variables en coordonnées polaires.

2 – En intégrant $(x, y) \mapsto \exp[-(x^2 + y^2)]$ sur $\mathbb{D}_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ ; x^2 + y^2 \leqslant n^2\}$ et en passant à la limite, montrer que $\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.