Examen de mathématiques

Vendredi 7 mai 2021

Durée de l'épreuve : **3 heures.**

L'utilisation de documents, téléphones portables, calculatrices, ... est interdite.

Recommandations :

Lisez attentivement l'énoncé et **rédigez** *succinctement* et *clairement* votre réponse.

Questions de cours

1/ Soit $f(z) = h(z)/g(z)$ où h et g sont deux fonctions entières (analytiques dans $\mathbb{C}$). Si $g(z_0) = 0$ et $g'(z_0) \neq 0$, quelle est l'expression du résidu de f en z_0, noté $\mathrm{Res}[f, z_0]$? Justifier.

2/ Soit $f_n(z) = h(z)/(z - z_0)^n$ où h est une fonction entière.

a) Quelle est la nature de la singularité de f_n ?

b) Donner $\mathrm{Res}[f_n, z_0]$ (rappeler la démonstration de ce résultat).

3/ Énoncer le théorème des résidus.

Exercice 1 : Série de petites questions

Les questions suivantes requièrent chacune un calcul *très court*.

1/ (exercice du TEST 1 sous `eCampus`) La fonction $Q(x, y) = y + 6xy$ est-elle la partie imaginaire d'une fonction analytique f de la variable $z = x + \mathrm{i}\, y$? Donner $f(z)$.

2/ (exercice du TEST 2 sous `eCampus`) On considère l'intégrale

$$J = \int_\Delta \mathrm{d}z\, \frac{2}{z^3} \tag{1}$$

sur le segment Δ allant de $z = 1$ à $z = 2 + \mathrm{i}$ (cf. figure 1).

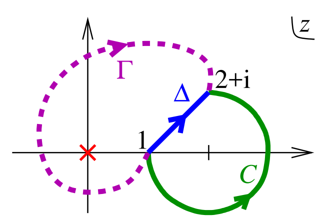

Figure 1 : *Trois chemins allant de $z = 1$ à $z = 2 + \mathrm{i}$: le segment Δ, l'arc de cercle $\mathcal{C}$ centré sur $z = 2$ et le chemin Γ (en tirets) entourant l'origine.*

a) Calculer l'intégrale J.

b) $\mathcal{C}$ est l'arc de cercle centré sur $z = 2$. L'intégrale $\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\, \frac{2}{z^3}$ est-elle égale à J ? Justifier.

c) Le contour Γ est représenté en tirets sur la figure. $\int_\Gamma \mathrm{d}z\, \frac{2}{z^3}$ est-elle égale à J ? Justifier.

3/ (exercice du TEST 3 sous `eCampus`) Quelles sont les singularités de $f(z) = \frac{z^2+2}{z^2+1}$? Calculer les résidus aux pôles.

4/ Calculer le résidu de $g(z) = \frac{z^2+2}{z^4-1}$ en $z = \mathrm{i}$.

5/ Calculer $\oint_{\mathcal{C}_\pi} \mathrm{d}z\, \frac{\sin^6 z}{z-\pi/3}$ où $\mathcal{C}_\pi$ est le cercle de rayon π centré sur $z=0$.

6/ Calculer $\oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\, z^n\, \mathrm{e}^{1/z}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, où $\mathcal{C}_1$ est le cercle unité centré sur $z=0$.

7/ En écrivant

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \cos\left(\frac{\pi}{6} + 5\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \sin^3\left(\frac{\pi}{3} + 7\,\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}\right) \tag{2}$$

comme une intégrale de contour sur le cercle unité, déduire la valeur de l'intégrale.

8/ Calculer $\oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\, \frac{z\,\mathrm{e}^{z\,t}}{(z+1)^2}$ où $\mathcal{C}_2$ est le cercle de rayon 2 centré sur $z=0$.

Exercice 2 : Une intégrale

L'objectif de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \frac{x}{\mathrm{sh}(\pi x)} \tag{3}$$

(on rappelle que $\mathrm{sh}\, x = (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})/2$). Pour cela on étudie l'intégrale

$$\oint_\Gamma \mathrm{d}z\, f(z) \qquad \text{de la fonction } f(z) = \frac{z}{\mathrm{sh}(\pi z)} \tag{4}$$

sur le contour fermé Γ représenté sur la figure 2

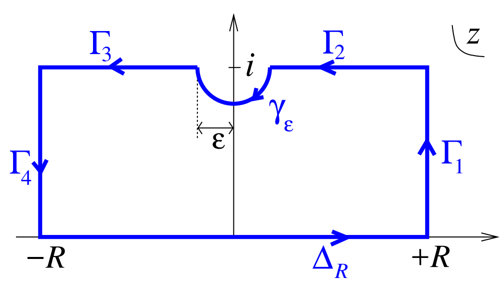

FIGURE 2 : *Le contour* $\Gamma = \Delta_R \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \gamma_\varepsilon \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ *est la réunion de cinq segments et d'un demi cercle* γ_ε *de rayon* ε *centré sur* $z = \mathrm{i}$.

1/ Discuter la convergence de l'intégrale I.

2/ Quel est le domaine d'analyticité de la fonction $f(z)$? Préciser la nature de ses singularités, si elle en a.

3/ Que vaut $\oint_\Gamma \mathrm{d}z\, f(z)$? Quel théorème utilise-t-on ici ? (énoncer le théorème)

4/ a) Si l'on pose $z = x + \mathrm{i}\,y$, justifier que $|\,\mathrm{sh}\, x| \leqslant |\,\mathrm{sh}\, z| \leqslant \mathrm{ch}\, x$.

b) Paramétrer le segment Γ_1 et écrire $\int_{\Gamma_1} \mathrm{d}z\, f(z)$. En bornant soigneusement $|\int_{\Gamma_1} \mathrm{d}z\, f(z)|$, montrer que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_1} \mathrm{d}z\, f(z) = 0\,. \tag{5}$$

De même, on admettra que $\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_4} \mathrm{d}z\, f(z) = 0$

5/ Paramétrer le demi cercle γ_ε de rayon ε centré sur $z = \mathrm{i}$ (cf. figure 2). Calculer

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \mathrm{d}z\, f(z) \tag{6}$$

(s'il faut permuter une intégrale et une limite, on admettra que c'est licite).

6/ Paramétrer soigneusement les deux contours Γ_2 et Γ_3. Montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\Gamma_2}+\int_{\Gamma_3}\right)\mathrm{d}z\,f(z)=\int_{\Delta_R}\mathrm{d}z\,f(z) \tag{7}$$

7/ Déduire la valeur de l'intégrale I.

Exercice 3 : une transformation de Fourier

On va calculer la transformée de Fourier $\hat{\phi}_\lambda(k)=\mathcal{F}_k[\phi_\lambda]$ de la fonction

$$\phi_\lambda(x)=\frac{1}{x^2+2\lambda\,x+2\lambda^2}\,, \tag{8}$$

où $\lambda>0$. On introduit la fonction analytique

$$f(z)=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}}{z^2+2z+2}\qquad\text{avec } z\in\mathbb{C}\text{ et }k\in\mathbb{R}\,. \tag{9}$$

1/ Quel est le domaine d'analyticité de la fonction f ?

2/ Si elle a un(des) pôle(s), préciser leur nature. Calculer les résidus correspondants.

3/ On considère deux contours fermés $\Gamma_\pm=\Delta_R\cup\mathcal{C}_R^\pm$, où $\Delta_R=[-R,R]$ est le segment sur l'axe réel et $\mathcal{C}_R^+$ (resp. $\mathcal{C}_R^-$) le demi-cercle centré sur l'origine dans le plan complexe supérieur (resp. inférieur) ; cf. figure 3.

Si $k>0$ laquelle des deux intégrales $\int_{\mathcal{C}_R^+}\mathrm{d}z\,f(z)$ ou $\int_{\mathcal{C}_R^-}\mathrm{d}z\,f(z)$ peut-elle être bornée par un majorant qui s'annule dans la limite $R\to\infty$?

Et pour $k<0$?

(justifier soigneusement la majoration de l'intégrale dans les deux cas).

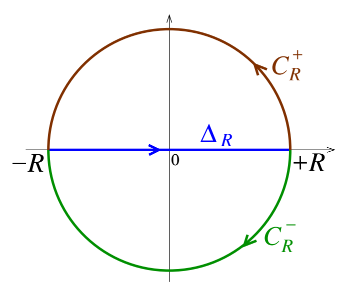

FIGURE 3 : *Deux contours fermés* $\Gamma_+=\Delta_R\cup\mathcal{C}_R^+$ *et* $\Gamma_-=\Delta_R\cup\mathcal{C}_R^-$.

4/ Suivant le signe de k, appliquer le théorème des résidus à $\oint_{\Gamma_+}\mathrm{d}z\,f(z)$ ou $\oint_{\Gamma_-}\mathrm{d}z\,f(z)$ et calculer

$$\hat{\phi}_1(k)=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{x^2+2x+2} \tag{10}$$

5/ Déduire $\hat{\phi}_\lambda(k)$.

6/ Donner l'expression de $\phi_\lambda(x-\lambda)$ et $\mathcal{F}_k[\phi_\lambda(x-\lambda)]$. Commenter.

SOLUTIONS SUR LA PAGE DU COURS : CF. `http://lptms.u-psud.fr/christophe_texier/`