

EXAMEN DE PHYSIQUE STATISTIQUE

Lundi 17 mai 2021

Durée de l'épreuve : **3h.**

L'utilisation de documents, calculatrices, téléphones portables, ... est interdite.

Recommandations :

Lisez attentivement l'énoncé et rédigez *succinctement* et *clairement* votre réponse.

Vérifiez vos calculs (analyse dimensionnelle, etc) ; n'oubliez pas de vous **relire**.

Pensez aux **informations en annexe**.

1 Question de cours

On considère un système dont la température T et le potentiel chimique μ sont fixés par un thermostat/réservoir. Les microétats du système sont notés $\{|\ell\rangle\}$. Le microétat $|\ell\rangle$ est caractérisé par une énergie E_ℓ et un nombre de particules N_ℓ .

- 1/ Rappeler la définition de la fonction de grand partition Ξ et l'expression de la distribution grand canonique P_ℓ^g .
- 2/ Comment déduire le nombre moyen de particules \bar{N}^g à partir de Ξ (démontrer la relation).
- 3/ À partir de la formule de Shannon, retrouver l'expression de l'entropie grand canonique S^g en fonction du grand potentiel J , de l'énergie moyenne \bar{E}^g et de \bar{N}^g .
- 4/ Démontrer $S^g = -\frac{\partial J}{\partial T}$.

2 Capacité calorifique du soleil et sa stabilité

Introduction.— Le soleil est principalement constitué d'hydrogène et d'hélium. Sa masse est $M_\odot \simeq 2 \times 10^{30}$ kg et son rayon de $R_\odot \simeq 690\,000$ km. Le cœur est la partie interne d'un rayon de $R_{\text{cœur}} \simeq 210\,000$ km (50% de la masse), où ont lieu les réactions de fusion nucléaire : chaque seconde, 620Mt d'hydrogène se transmutent en 615.7Mt d'hélium, la différence étant convertie en énergie rayonnant vers les couches externes. Au centre la température atteint $T_{\text{cœur}} \simeq 15 \times 10^6$ K puis baisse en s'éloignant du centre, jusqu'à 7×10^6 K au bord du cœur, ce qui ne permet plus d'amorcer la fusion.

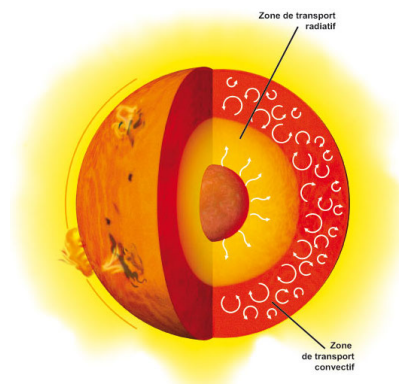
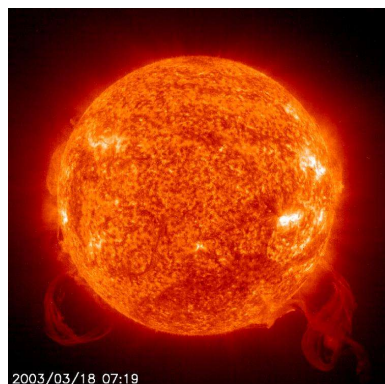


FIGURE 1 : À gauche : le soleil vu par le satellite SOHO. À droite : structure du soleil.

- 1/ Justifier que les protons et les électrons dans le cœur sont dans un régime *non* relativistes : pour cela, convertir $T_{\text{cœur}}$ en eV (cf. annexe).

Nous supposons que la matière est à l'équilibre thermodynamique (concernant le soleil, cela se justifie car les flux d'énergie sont faibles relativement à l'énergie totale) et nous nous plaçons dans le cadre de l'**ensemble canonique**, avec une température T supposée **uniforme** pour simplifier.

- 2/ Bien que le soleil soit isolé, comment justifier une analyse dans le cadre canonique ?

Notations : une particule i a une masse m_i , une position \vec{r}_i et une impulsion \vec{p}_i . Nous étudions N particules en interaction gravitationnelle et donc en contact avec un thermostat, décrites par l'hamiltonien

$$H = E_{\text{cin}} + E_G = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} - \frac{1}{2} \sum_{i,j (\neq)} \frac{Gm_i m_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|} \quad (1)$$

où G est la constante de gravitation (on se place dans un cadre classique). Nous commençons par prouver un théorème utile pour la suite.

- 3/ On note $\vec{\Gamma}$ un point de l'espace des phases classiques et $H(\vec{\Gamma})$ l'hamiltonien. Décrire plus précisément les microétats. Donner l'expression de la distribution canonique (sous forme d'une densité de probabilité $\rho^c(\vec{\Gamma})$ dans l'espace des phases).

- 4/ **Théorème d'équipartition généralisé** : Soit Γ_i une des coordonnées. Rappeler comment la moyenne canonique, notée $\langle \dots \rangle$ ou $\overline{\dots}^c$, s'exprime en termes de la distribution canonique $\rho^c(\vec{\Gamma})$. En admettant que $H(\vec{\Gamma}) \rightarrow +\infty$ si $\Gamma_i \rightarrow \pm\infty$, montrer que

$$\left\langle \Gamma_i \frac{\partial H(\vec{\Gamma})}{\partial \Gamma_j} \right\rangle = k_B T \delta_{i,j} \quad (2)$$

(sans hypothèse supplémentaire sur la forme de H).

- 5/ Dédurre $\sum_{i=1}^N \left\langle \vec{p}_i \cdot \frac{\partial H(\vec{\Gamma})}{\partial \vec{p}_i} \right\rangle$ en fonction de $k_B T$ (où $\partial/\partial \vec{p}_i$ est une notation pour le gradient par rapport aux coordonnées d'impulsion). Comment cette grandeur est-elle liée à l'énergie cinétique moyenne $\overline{E_{\text{cin}}}^c$?

- 6/ **Théorème du viriel** (Rudolf Clausius) : On note $\vec{F}_i = -\frac{\partial H(\vec{\Gamma})}{\partial \vec{r}_i} = -\sum_{j (\neq i)} Gm_i m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^3}$ la force exercée sur la particule i . Montrer que $\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i$ est proportionnelle à l'énergie potentielle E_G . Dédurre la moyenne canonique de l'énergie potentielle $\overline{E_G}^c$.

- 7/ **Capacité calorifique des particules en interaction gravitationnelle** : Calculer la moyenne canonique de l'énergie totale $\overline{E}^c = \overline{E_{\text{cin}}}^c + \overline{E_G}^c$. Dédurre la valeur de la capacité calorifique et montrer que $C_{\odot} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \overline{E}^c}{\partial T} < 0$.

- 8/ Rappeler à quelle propriété était liée l'inégalité $C_V > 0$ vue en cours. Est-ce en contradiction avec l'analyse présente ?

- 9/ **Stabilité du soleil** : les réactions de fusion au cœur du soleil fournissent une puissance P_f . On note L la puissance rayonnée (la luminosité). *Stricto sensu*, le soleil est dans un état stationnaire *hors* équilibre, tel que $\frac{d}{dt} E = P_f - L = 0$ (on note maintenant $E \equiv \overline{E}^c$ l'énergie totale). Supposons que le cœur soit soumis à une fluctuation de température $\delta T_{\text{cœur}} > 0$, les réactions de fusion sont alors favorisées $\delta P_f \simeq \alpha \delta T_{\text{cœur}}$ (où $\alpha > 0$) sans que la luminosité ne change, ce qui conduit à une augmentation de l'énergie $\delta E \simeq \Delta t \delta P_f > 0$, où Δt est la durée pendant laquelle s'établit la fluctuation de température. La capacité calorifique caractérise la "réponse" (rétroaction) de la température à une variation d'énergie δE . Justifier la stabilité de l'étoile.

3 Interaction ferromagnétique *versus* anti-ferromagnétique

Considérons deux spins d'Ising $\sigma_i \in \{+1, -1\}$ en interaction, soumis à un champ magnétique B . Dans des unités appropriées (où B a la dimension d'une énergie), on écrit l'hamiltonien d'Ising

$$H(\sigma_1, \sigma_2) = -J \sigma_1 \sigma_2 - B (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (3)$$

L'objectif est de comparer la nature de l'état de basse température pour les deux types d'interaction $J > 0$ (Ferro) et $J < 0$ (Anti-Ferro). On suppose que les deux spins sont en contact avec un thermostat de température T .

A. "Échauffement" (question de cours) : cas $J = 0$

- 1/ Calculer la fonction de partition Z du système (les deux spins).
- 2/ Rappeler comment déduire (en général) la moyenne canonique de l'aimantation \overline{M}^c de l'énergie libre F . Calculer \overline{M}^c pour les deux spins. Tracer \overline{M}^c en fonction de B .
- 3/ Calculer la susceptibilité magnétique $\chi \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{\partial \overline{M}^c}{\partial B} \right|_{B=0}$ (définition générale). On notera χ_0 la susceptibilité à $J = 0$. Interpréter le comportement de χ_0 avec T .

B. Interaction ferromagnétique $J > 0$

- 1/ Faire la liste des microétats et donner les énergies correspondantes pour les deux spins décrits par (3) (faire un schéma des niveaux d'énergie pour $J > |B|$). Déduire Z .
- 2/ Calculer \overline{M}^c . Justifier que $m \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\sigma_1^c} = \overline{\sigma_2^c} = \frac{1}{2} \overline{M}^c$.
- 3/ Calculer la susceptibilité χ . Étudier les limites $\beta J \ll 1$ et $\beta J \gg 1$. Comparer à χ_0 . L'interaction favorise-t-elle ou défavorise-t-elle l'aimantation du système ?
- 4/ Pour mieux comprendre ce point, on introduit la corrélation $\mathcal{C} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\sigma_1 \sigma_2^c} - \overline{\sigma_1^c} \times \overline{\sigma_2^c}$.
 - a) "l'état paramagnétique" correspond aux spins indépendants. Que vaut \mathcal{C} ?
 - b) Par un argument général, justifier que $m = 0$ pour $B = 0$ (ce qui montre que l'aimantation moyenne n'est pas une bonne observable à $B = 0$).
 - c) La question intéressante est de savoir si l'interaction (Ferro, $J > 0$, ou Anti-Ferro, $J < 0$) peut générer des *corrélations* Ferro (spins alignés) ou Anti-Ferro (spins anti-alignés). Justifier que \mathcal{C} est une bonne observable (signe de \mathcal{C} dans les deux cas ?).
- 5/ Montrer que $\overline{\sigma_1 \sigma_2^c}$ peut être déduit tout aussi facilement que \overline{M}^c de F (ou Z). Calculer $\overline{\sigma_1 \sigma_2^c}$ explicitement (dans le cas général, à $B \neq 0$).
- 6/ Montrer que

$$\mathcal{C} = \frac{1 - e^{-4\beta J}}{[\text{ch } 2\beta B + e^{-2\beta J}]^2} \quad (4)$$

- 7/ Simplifier l'expression de \mathcal{C} en considérant la limite de forte interaction $\beta J \gg 1$. Étudier les limites $\beta|B| \ll 1$ et $\beta|B| \gg 1$. Interpréter.

C. Interaction anti-ferromagnétique $J < 0$:

- 1/ Donner les expressions de $m = \overline{\sigma_1^c} = \overline{\sigma_2^c}$ et \mathcal{C} en fonction de B et $K \stackrel{\text{def}}{=} |J|$.
- 2/ Simplifier ces expressions dans la limite $\beta|B| \gg 1$ et $\beta K \gg 1$. Donner la limite de ces deux grandeurs dans les différents régimes (a) $|B| > K$, (b) $|B| = K$, (c) $|B| < K$.

D. Conclusion : Comparer l'état du système pour $T \rightarrow 0$ dans les cas $J > 0$ et $J < 0$. Dessiner un "diagramme de phases" dans le plan (B, J) , i.e. identifier les régions du plan correspondant à des corrélations Para, Ferro et Anti-Ferro.

Annexe

• **Constantes fondamentales :** $k_B \simeq 1.38 \times 10^{-23}$ J/K ; $c \simeq 3 \times 10^8$ m/s ; $q_e \simeq -1.6 \times 10^{-19}$ C ; masse du proton $m_p \simeq 938$ MeV/c² ; masse de l'électron $m_e \simeq 511$ keV/c².