Examen de mathématiques – Session 2

lundi 21 juin 2021 – durée 3h

L'énoncé contient 2 pages. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

1 Singularité d'une fonction complexe (*3 points*)

1. Déterminer les positions et le type des singularités de chacune des fonctions de la variable complexe z suivantes :

$$\begin{aligned} a) &\qquad f_1(z) = \frac{1}{\sin 2z}, \\ b) &\qquad f_2(z) = \sin(1/z), \\ c) &\qquad f_3(z) = \frac{e^z - 1}{z^3}. \end{aligned}$$

2. S'il s'agit d'un pôle, déterminer l'ordre et le résidu.

2 Théorème des résidus (*5 points*)

1. Énoncer (avec ses hypothèses) le théorème des résidus.
2. Après avoir vérifié la convergence, calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} i) &\qquad I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2 + x^4}, \\ ii) &\qquad I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta}. \end{aligned}$$

Indications : Pour la question i), l'intégration dans le plan complexe se fera sur un demi-cercle. Pour la question ii), transformer l'intégrale en une intégrale sur le cercle unité dans le plan complexe.

3 Expression d'une somme (*4 points*)

L'objectif de cet exercice est d'obtenir la relation suivante ($n \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbb{R}$) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{u^n}{n!} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2u\cos\theta} d\theta. \tag{1}$$

On admettra qu'il est licite de permuter somme et intégrale.

1. Tout d'abord, démontrer l'égalité :

$$\frac{u^n}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \oint_\Gamma \frac{e^{uz}}{z^{n+1}} dz,$$

où Γ est un contour fermé du plan complexe entourant l'origine et $z \in \mathbb{C}$.

2. Calculer explicitement la somme de la série :

$$S(u,z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n e^{uz}}{n! z^{n+1}},$$

3. Sur un contour $\gamma \in \mathbb{C}$ bien choisi, donner l'expression de l'intégrale :

$$I(u) = \frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma S(u,z)dz.$$

4. En déduire la relation (1).

4 Transformée de Fourier (*5 points*)

On rappelle la définition de la transformée de Fourier d'une fonction f sommable sur $\mathbb{R}$:

$$\hat{f}(k) = \mathcal{F}_k[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx.$$

1. Soit f une fonction telle que f, f' et f'' sommables sur $\mathbb{R}$. Redémontrer les relations liant $\mathcal{F}_k[f']$ à $\mathcal{F}_k[f]$, et $\mathcal{F}_k[f'']$ à $\mathcal{F}_k[f]$ en donnant les conditions de validité.
2. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $\rho(x) = e^{-|x|}$ (le calcul sera aussi utile pour l'exercice 5).
3. On cherche à résoudre l'équation :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - f(x) = -\rho(x).$$

   (a) Exprimer l'équation vérifiée par $\hat{f}$.
   (b) En déduire une expression intégrale de f.
4. Calculer $f(x)$ en utilisant le théorème des résidus.
5. Tracer soigneusement la fonction f (pour cela, analyser son comportement limite pour $x \to 0$).

5 Équation intégrale de Fredholm du second type (*3 points*)

On souhaite trouver l'expression de $f(x)$ vérifiant l'équation intégrale suivante :

$$f(x) = e^{-|x|} + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-t|} f(t) dt\,, \tag{2}$$

avec λ un paramètre réel tel que $\lambda < 1/2$.

1. Par définition, le produit de convolution de deux fonctions f et g est : $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt$. Exprimer $\mathcal{F}_k[f*g]$ en fonction de $\hat{f}(k)$ et $\hat{g}(k)$. Une démonstration est demandée.
2. Donner l'expression de la transformée de Fourier de l'équation (2) et en déduire $\hat{f}(k)$.
3. Trouver $f(x)$.