université PARIS-SACLAY

002365

ANNÉE : 2020 – 2021

UNITÉ D'ENSEIGNEMENT : L3 PAPP

ÉPREUVE DE : Mathematiques
21 Juin 2021

NOTE 20 /20	Coefficient	Note affectée du coefficient

NOM : TEXIER

Prénoms : Christophe

N° D'INSCRIPTION OU DE TABLE

SALLE D'EXAMEN :

Remplissez très lisiblement l'en-tête à gauche et le talon ci-dessous

Si votre composition comporte plusieurs feuilles, numérotez-les .../...

Exercice 1

1.a) $f_1(z) = \frac{1}{\sin 2z}$; $\sin 2z = 0$ pour $z = n\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$

pôles

b) $f_2(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{i/z} - e^{-i/z}\right)$ $\Rightarrow$ $z=0$ est une singularité essentielle

c) $f_3(z) = \frac{e^z - 1}{z^3}$ le numérateur s'annule en $z=0$

$e^z - 1 \simeq z + \frac{z^2}{2} + \dots$ si $z \to 0$

$\Rightarrow f_3(z) \simeq \frac{1}{z^2}$ si $z \to 0$ $\Rightarrow$ pôle double

2. Résidu a) $\sin x \simeq \underbrace{(-1)^n}_{\cos(n\pi)} (x - n\pi)$ si $x \to n\pi$

pôles en $z_n = n\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $\sin 2z \simeq (-1)^n (2z - n\pi)$ si $z \to z_n$

$f_1(z) \simeq \frac{(-1)^n}{2(z - z_n)}$

$\Rightarrow \text{Rés}[f_1, z_n] = \frac{1}{2}(-1)^n$

b) $\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{i}{z}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{-i}{z}\right)^n\right) = \frac{1}{i} \sum_{n \text{ impairs}} \frac{1}{n!}\left(\frac{i}{z}\right)^n$

$\Rightarrow \text{Rés}\left[\sin\frac{1}{z}, 0\right] = 1$ ← coeff. du terme $n=1$

c) $f_3(z) = \frac{e^z - 1}{z^3} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z} + \frac{1}{3!} + O(z)$

$\text{Rés}[f_3, 0] = 1/2$

Exercice 2

1. cf. cours

2. i) $I_1 = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2+x^4}$

~~*~~ l'intégrande est bornée $\frac{1}{1+x^2+x^4} \leq 1$

pb à l'∞ ? $\int^{\infty} \frac{dx}{x^4} < \infty$ OK

Calcul par le th. des résidus.

Pôles ?

$X^2 + X + 1 = 0$

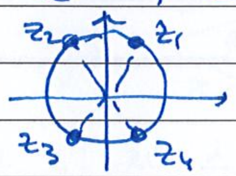
$\Rightarrow X_\pm = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm \frac{2i\pi}{3}}$

$(x^4 + x^2 + 1) = 0 \iff (x^2 - X_+)(x^2 - X_-) = 0$

$x^2 = e^{2i\pi/3}$

$x = e^{i\pi/3}$ ou $-e^{i\pi/3} = e^{-2i\pi/3}$

$\Rightarrow$ 4 racines $e^{i\pi/3}, e^{2i\pi/3}, e^{-i\pi/3}, e^{-2i\pi/3}$



ce sont 4 pôles simples pour $f(z) = \frac{1}{z^4 + z^2 + 1}$

① f analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_4\}$
(4 pôles simples)

② Résidus :

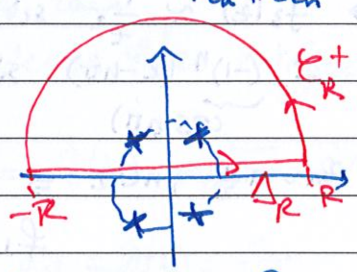
f est du type $f(z) = \frac{1}{g(z)}$ avec $\begin{cases} g(z_0) = 0 \\ g'(z_0) \neq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \text{Rés}\left[\frac{1}{g(z)}, z_0\right] = \frac{1}{g'(z_0)}$

$\text{Rés}[f, z_n] = \frac{1}{4z_n^3 + 2z_n} = \frac{1}{2z_n(2z_n^2+1)}$

③ Contour :

Γ_+ :



$f(z) = \frac{1}{\prod_n (z - z_n)}$

④

$\left| \int_{\mathcal{C}_R^+} f \right| \leq \frac{\pi R}{(R-1)^4} \sim \frac{1}{R^3} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$

$|z - z_n| \geq \big||z| - \underbrace{|z_n|}_{1}\big|$

$|f(z)| \leq \frac{1}{\prod_n (|z| - \underbrace{|z_n|}_{1})}$

⑤ th. des résidus :

$\underbrace{\int_{\Gamma_+} f}_{\downarrow R\to\infty \atop I_1} = 2i\pi\left(\underbrace{\text{Rés}[f, z_1] + \text{Rés}[f, z_2]}\right)$

$\frac{1}{2z_1(2z_1^2+1)} + \frac{1}{2z_2(2z_2^2+1)} = \frac{e^{-i\pi/3}}{2(\underbrace{2e^{\frac{2i\pi}{3}}+1}_{i\sqrt{3}})} + \frac{e^{-2i\pi/3}}{2(\underbrace{2e^{-\frac{4i\pi}{3}}+1}_{-i\sqrt{3}})}$

$= \frac{1}{2i\sqrt{3}}\left[\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} - \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{1}{2i\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \boxed{I_1 = \pi/\sqrt{3}}$

ii) $I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}}$ $\quad z = e^{i\theta}$, $\frac{dz}{iz} = d\theta$

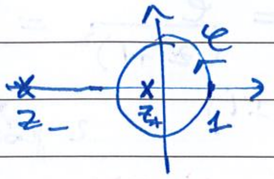
$= \oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{iz} \frac{1}{2+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}$

$\mathcal{C}$: cercle unité

Attention : ne pas écrire z^* ⇒ l'intégrande ne serait pas une fct analytique !

$= \frac{2}{i} \oint_{\mathcal{C}} dz \frac{1}{z^2+4z+1} = \frac{2}{i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z-z_+)(z-z_-)}$

→ deux racines $-2 \pm \sqrt{3} = z_\pm$



seule z_+ est dans le cercle.

$$\Rightarrow \boxed{I_2 = \frac{2}{i} \times 2i\pi \underbrace{\text{Rés}[f, z_+]}_{\frac{1}{z_+ - z_-} = \frac{1}{2\sqrt{3}}} = 2\pi/\sqrt{3}}$$

Exercice 3

1/ $f(z) = \frac{e^{uz}}{z^{n+1}}$ où $u \in \mathbb{R}$: cette fct a un pôle d'ordre $n+1$ en $z=0$

série de Laurent en $z=0$: $\frac{1}{z^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(uz)^k}{k!} = \frac{1}{z^{n+1}} + \dots + \frac{u^n}{n!\, z} + \dots$

on identifie le résidu

$$\text{Rés}[f, 0] = \frac{u^n}{n!}$$

$$\oint dz\, f(z) = 2i\pi\, \text{Rés}(f, 0] = \frac{u^n}{n!} . 2i\pi$$

Γ : entoure $z=0$ une fois dans le sens direct $\Rightarrow \oint_\Gamma \frac{dz}{2i\pi} \frac{e^{uz}}{z^{n+1}} = \frac{u^n}{n!}$

2/ $S(u,z) = e^{uz} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!\, z^{n+1}} = \frac{1}{z} e^{uz} e^{u/z}$

3/ $I(u) = \oint_\gamma \frac{dz}{2i\pi} S(u,z) = \oint_\gamma \frac{dz}{2i\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n e^{uz}}{n!\, z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \oint_\gamma \frac{dz}{2i\pi} \frac{e^{uz}}{z^{n+1}}$

γ → entoure l'origine

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{u^n}{n!}\right)^2$$

4/ $I(u) = \underbrace{\oint_\gamma \frac{dz}{2i\pi} S(u,z)}_{\text{on déforme } \gamma \to \text{ cercle unité}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{u^n}{n!}\right)^2$

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{2i\pi z} e^{u(z+\frac{1}{z})} \underset{z = e^{i\theta} \text{ sur } \mathcal{C}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{2u\cos\theta}$$

ce qui démontre la relation $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{2n}}{(n!)^2} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{2u\cos\theta}}$

Exercice 4

1/ $\mathcal{F}_k[f'] = ik \cdot \mathcal{F}_k[f]$

2/ $\hat{\rho}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx\, e^{-ikx-|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{k^2+1}$

3/ on fourierise l'éq. diff $f''(x) - f(x) = -\rho(x)$

$$-(k^2+1)\hat{f}(k) = -\hat{\rho}(k) \Rightarrow \hat{f}(k) = \frac{\hat{\rho}(k)}{k^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{(k^2+1)^2}$$

$$f(x) = \mathcal{F}_x^+[\hat{f}] = 2\int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ikx}}{(k^2+1)^2}$$

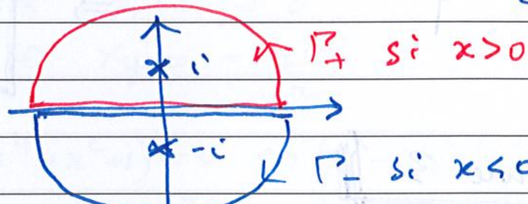
4/ on utilise le th. des résidus pour $\varphi(z) = \frac{e^{izx}}{(z^2+1)^2} = \frac{e^{izx}}{(z-i)^2(z+i)^2}$

analytiques sur $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ — 2 pôles doubles

$x \in \mathbb{R}$

$$|e^{izx}| = e^{-x \operatorname{Im} z}$$

$\Rightarrow$ choix du contour :



$$\left|\int_{\mathcal{C}_R^\pm} \varphi(z)\right| \leq R\int_0^{\pm\pi} d\theta\, \frac{e^{-xR\sin\theta}}{(R-1)^4} \xrightarrow[R\to\infty]{x>0} 0 \text{ car } \sin\theta>0$$

demi cercles

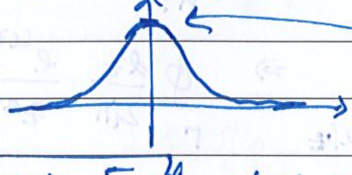
$$\xrightarrow{x<0} 0 \text{ car } \sin\theta<0$$

$x>0$: $f(x) = \frac{2}{2\pi} 2i\pi \operatorname{Rés}[\varphi, i] = 2i \frac{d}{dz}\left[\frac{e^{izx}}{(z+i)^2}\right]_{z=i} = \dots = \frac{(1+x)e^{-x}}{2}$

on fait la m. chose pour $x<0$... $\Rightarrow$ $\boxed{f(x) = \frac{1}{2}(1+|x|)e^{-|x|}}$

5/ comportement pour $x\to 0$ $f(x) \simeq \frac{1}{2}\left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{|x|^3}{3} + \dots\right]$

dérivable 2X $\mapsto \hat{f}(k) \sim \frac{1}{k^4}$ (th. de réciprocité)



Exercice 5

1/ cf. cours

2/ on fourierise l'éq. intégrale $f(x) = \underbrace{e^{-|x|}}_{\rho(x)} + \lambda \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dt\, f(t)\, \underbrace{e^{-|x-t|}}_{\rho(x-t)}}_{(f*\rho)(x)}$

$$\hat{f}(k) = \hat{\rho}(k) + \lambda\sqrt{2\pi}\,\hat{f}(k)\hat{\rho}(k) \Rightarrow \hat{f}(k) = \frac{\hat{\rho}(k)}{1-\lambda\sqrt{2\pi}\,\hat{\rho}(k)}$$

on a vu au 2 que $\sqrt{2\pi}\hat{\rho}(k) = \frac{2}{k^2+1}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{k^2+1-2\lambda}}$

3/ on a reconnu une Lorentzienne (si $1-2\lambda>0$)

$$\boxed{f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} \frac{2e^{ikx}}{k^2+(1-2\lambda)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-2\lambda}} e^{-\sqrt{1-2\lambda}\,|x|}}$$

(on a étudié la TF de $e^{-a|x|}$ en cours...

rappel : $\int \frac{dk\ a/\pi}{k^2+a^2} e^{ikx} = e^{-a|x|}$)