M1 Magistère de physique fondamentale – ENS PSay,

universite PARIS-SACLAY

Option Transitions de phase – Examen

Vendredi 14 janvier 2022

Durée : 3h

L'utilisation de documents, calculatrices, téléphones portables,... est interdite.

Recommandations :

Lisez attentivement l'énoncé et rédigez *succinctement* et *clairement* votre réponse.
n'oubliez pas de vous **relire**.

1 Phase nématique

On rappelle que le paramètre d'ordre décrivant la transition isotrope/nématique est un tenseur symétrique de trace nulle, caractérisé par un nombre $S \in [0,1]$ et un vecteur unitaire $\vec{n}$ indiquant la direction des molécules. On considère la phase nématique (suffisament loin de la transition, $T \ll T_c$, avec $S \simeq 1$). Si le système est inhomogène, le directeur porte une dépendance spatiale, $\vec{n}(\vec{r})$. À partir de considérations de symétrie, Frank a proposé en 1958 l'énergie libre élastique

$$F_{\text{el}}[\vec{n}] = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\left\{K_1\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)^2 + K_2\left[\vec{n}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{n}\right)\right]^2 + K_3\left[\vec{n}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{n}\right)\right]^2\right\} \qquad (1)$$

où K_1 (splay), K_2 (twist) et K_3 (bend) sont trois constantes positives. Pour simplifier, nous étudions le cas où le directeur reste dans le plan xOy, $\vec{n}(\vec{r}) = (\cos[\psi(z)]\,, \sin[\psi(z)]\,, 0)$, avec une orientation dépendant seulement de la coordonnée z. En présence d'un champ magnétique homogène $\vec{H} = (0, H, 0)$, l'énergie libre reçoit aussi une contribution magnétique $F_{\text{magn}}[\vec{n}] = -\frac{1}{2}\mu_0\chi_a \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\left(\vec{H}\cdot\vec{n}\right)^2$, où χ_a est la contribution anisotrope à la susceptibilité magnétique.

1/ Montrer que l'énergie libre par unité de surface est de la forme

$$F[\psi(z)] = \frac{F_{\text{el}} + F_{\text{magn}}}{\text{Surface}} = g\int \mathrm{d}z\,\left\{\frac{1}{2}\left[\psi'(z)\right]^2 - \frac{1}{\xi^2}\sin^2\psi(z)\right\} \qquad (2)$$

Exprimer g et ξ en fonction de K_i, $\chi_a > 0$ et H.

2/ Donner l'équation pour $\psi(z)$ correspondant à la minimisation de $F[\psi]$ (en négligeant les termes de bord).

3/ Si $\psi(z)$ minimise l'énergie libre, en utilisant l'analogie avec la mécanique (équation de Newton) pour une "particule" de "position" ψ au "temps" z, identifier une intégrale première, i.e. une grandeur indépendante de z, que l'on notera $\mathscr{E}$.

4/ On s'intéresse à une configuration décrivant une paroi de domaine, i.e. telle que $\psi(z) \to \pm\pi/2$ pour $z \to \pm\infty$. Que vaut $\mathscr{E}$? Déduire l'expression de $\psi(z)$ telle que $\psi(0) = 0$. Tracer $\psi(z)$.
Suggestion : pour intégrer, noter que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln|\tan(t/2)| = 1/\sin t$.

5/ Comparer l'énergie libre pour une paroi de domaine avec l'énergie libre de la solution uniforme $\psi(z) = \text{cste}$ (un ordre de grandeur en fonction des paramètres du problème est suffisant). Quel est le sens physique de la différence d'énergie libre ?

2 Effet FFLO et phase modulée

L'état supraconducteur, qui expulse le champ magnétique, et l'état ferromagnétique, caractérisé par une aimantation spontanée, sont *a priori* antagoniques. En 1964, Peter Fulde et Richard A. Ferrell d'une part, et Anatoly Larkin et Yuri Ovchinnikov d'autre part, ont prédit indépendamment la possible coexistence des deux phases sous forme de phase modulée où état supra et état ferro alternent dans l'espace : on parle d'état FFLO.

Nous étudions ici un modèle très simplifié qui prédit qualitativement l'allure du diagramme de phase. Nous nous plaçons dans le cadre de la théorie de Landau pour la fonctionnelle de Ginzburg-Landau $F[\phi]$ pour le champ supra (supposé réel ici). Pour simplifier, nous supposons que le système est invariant dans deux directions d'espace et l'énergie libre par unité de surface est

$$F[\phi(x)] = \int_0^L \mathrm{d}x \, \left\{ \frac{\sigma}{4} \left[\partial_x^2 \phi(x)\right]^2 + \frac{g}{2} \left[\partial_x \phi(x)\right]^2 + f_L(\phi(x)) \right\} \qquad \text{avec } \sigma > 0 \tag{3}$$

et

$$f_L(\phi) = \frac{a}{2}\phi^2 + \frac{b}{4}\phi^4 \qquad \text{avec } b > 0\,. \tag{4}$$

et $a = \tilde{a}\,(T - T_c)$. Le paramètre g, contrôlé par le champ magnétique, peut changer de signe.

Phases uniformes (transition normal/supra).— Nous étudions d'abord le cas où le paramètre d'ordre est uniforme $\phi_u(x) = \phi_0$ ($\phi_0 = 0$ pour l'état normal et $\phi_0 \neq 0$ pour l'état supra).

1/ Dans l'approche de Landau, quelle est l'équation permettant de déterminer le paramètre ϕ_0 ? Que vaut ϕ_0 (distinguer $a > 0$ et $a < 0$) ? Tracer ϕ_0 en fonction de T. Quel est l'ordre de la transition ?

2/ On introduit $f_0 = F[\phi_u(x)]/L$, l'énergie libre par unité de volume. Exprimer f_0 en fonction de a et b. Tracer f_0 en fonction de T.

Phase modulée (transition normal/FFLO).— Nous étudions maintenant sous quelle(s) condition(s) la phase modulée $\phi_m(x) = \phi_1 \cos(qx)$ est favorable. L'amplitude ϕ_1 de la phase FFLO et le vecteur d'onde q sont deux paramètres que nous déterminons plus bas.

3/ Calculer $f_m = F[\phi_m(x)]/L$ dans la limite de grand L.

Indication : pour $qL \gg 1$, on a
$\int_0^L \frac{\mathrm{d}x}{L} \cos^2(qx) \simeq \int_0^L \frac{\mathrm{d}x}{L} \sin^2(qx) \simeq \frac{1}{2}$ et $\int_0^L \frac{\mathrm{d}x}{L} \cos^4(qx) \simeq \int_0^L \frac{\mathrm{d}x}{L} \sin^4(qx) \simeq \frac{3}{8}$.

4/ Dans l'esprit de la théorie de Landau, montrer que les équations pour ϕ_1 et q ($\neq 0$) sont

$$\phi_1^2 \, q\,(g + \sigma\, q^2) = 0 \qquad \text{et} \qquad \phi_1 \left[a + g\, q^2 + \frac{\sigma}{2} q^4 + \frac{3b}{4}\phi_1^2 \right] = 0\,. \tag{5}$$

Justifier qu'une première condition pour la phase modulée est $g < 0$. Déduire la valeur de q correspondante.

$\boxed{\text{Jusqu'à la question } \mathbf{9/}\text{, on considère exclusivement } g < 0}$

5/ Que vaut ϕ_1 (donner son expression en fonction de a, b, g et σ) ? Justifier que la transition entre la phase normale ($\phi = 0$) et la phase FFLO (modulée) ($\phi_1 \neq 0$) se produit à une température $T_m > T_c$ et donner l'expression de T_m.

6/ Tracer ϕ_1 en fonction de T. La transition entre la phase normale et la phase FFLO est-elle du premier ou du second ordre ?

7/ Exprimer f_m en fonction de a, b, g et σ (distinguer $T > T_m$ et $T < T_m$).

Transition supra/FFLO.— Nous allons identifier la ligne de transition entre la phase supra uniforme ($\phi_0 \neq 0$) et la phase FFLO ($\phi_1 \neq 0$).

8/ Comparer f_0 (comme fonction de a et b) et f_m (comme fonction de a, b, g et σ) et identifier la ligne de transition (une relation entre a, g et σ).

Suggestion : Étudier les deux expressions dans la limite $a \to -\infty$ et argumenter qu'il existe une ligne séparant les deux phases, dans le cadrant $a < 0$ et $g < 0$.

9/ Exprimer ϕ_1 sur la ligne de transition, en fonction de a et b. La transition est-elle du premier ou du second ordre ?

Diagramme de phase.— Nous plaçons les différentes phases dans le plan (a, g) (on considère tout le plan, i.e. $g < 0$ et $g > 0$).

10/ Pour $g > 0$, quelle transition peut avoir lieu ?

Dessiner *soigneusement* les trois lignes de transition et repérer les domaines correspondant aux trois phases (indiquer sur les lignes l'ordre de la transition... faites un beau dessin ☺).

11/ Exposants critiques au point tricritique.

On varie la température pour $g \geqslant 0$. Que vaut l'exposant critique $\phi_0 \propto (T_c - T)^\beta$?

Le paramètre g est contrôlé par un paramètre : $g \propto h_c - h$. Si l'on fixe $T = T_c$, que vaut l'exposant critique $\phi_1 \propto (h_c - h)^{\beta'}$?

Solutions disponibles à `http://lptms.u-psud.fr/christophe_texier/`