

CORRECTION DE L'EXAMEN "TRANSITIONS DE PHASE"

Vendredi 14 janvier 2022

1 Paroi de domaine dans la phase nématique

We describe a spatial dependent order parameter. We consider S uniform ($T < T_1$) and consider that the director is spatial dependent, i.e. the unit vector $\vec{n}(\vec{r})$.

We study below the case where the director is in the xOy plane, $\vec{n}(\vec{r}) = (\cos \psi(z), \sin \psi(z), 0)$, with the angle depending only on the coordinate z .

1/ Obviously $\vec{\nabla} \cdot \vec{n} = 0$. We find $\vec{\nabla} \times \vec{n} = -\psi'(z) \vec{n}$, thus

$$F[\psi(z)] = K_2 \int dz \left\{ \frac{1}{2} [\psi'(z)]^2 - \frac{1}{\xi^2} \sin^2 \psi(z) \right\} \quad (1)$$

with $g = K_2$ and $\xi^{-2} = \chi_a H^2 / (2K_2)$.

2/ We have $\frac{\delta F}{\delta \psi(z)} = -K_2 \psi''(z) - \frac{K_2}{\xi^2} \sin 2\psi(z)$. The field equation corresponds to the configuration which minimizes the free energy,

$$\psi''(z) + \frac{1}{\xi^2} \sin 2\psi(z) = 0 \quad (2)$$

3/ We can find a "constant of motion" by analogy with classical mechanics (field equation is similar to the Newton equation for a particle at position $\psi(z)$ at time z in a potential $V(\psi) \propto -\sin^2 \psi$).

We may also directly check that $\frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{2} [\psi'(z)]^2 + \xi^{-2} \sin^2 \psi(z) \right\} = 0$ thanks to the field equation.

4/ We consider the field configuration with $\psi(z) \rightarrow \pm\pi/2$ for $z \rightarrow \pm\infty$. Hence $\mathcal{E} = \xi^{-2}$ since $\psi'(z) \rightarrow 0$ at infinity. We can write

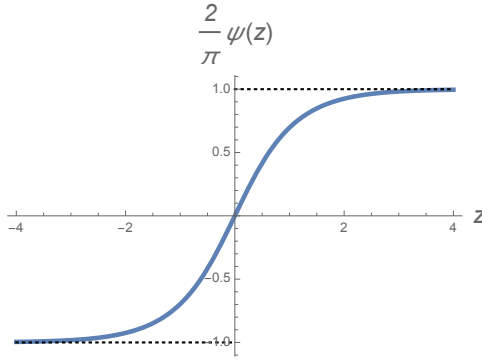
$$\frac{1}{2} [\psi'(z)]^2 + \xi^{-2} \sin^2 \psi(z) = \xi^{-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\psi}{\cos \psi} = \frac{\sqrt{2}}{\xi} dz \quad (3)$$

thus

$$\int_0^{\psi(z)} \frac{d\psi}{\cos \psi} = \frac{\sqrt{2}}{\xi} z \quad (4)$$

for $\psi(0) = 0$. Using $\frac{d}{dt} \ln |\tan(t/2 + \pi/4)| = 1/\cos t$ one deduces

$$\tan \left(\frac{1}{2} \psi(z) + \frac{\pi}{4} \right) = e^{\sqrt{2}z/\xi} \quad (5)$$



The uniform configuration is $\psi = \pm\pi/2$ (the minimum of the "potential"), hence it has a free energy $F[\text{uniform}] = -K_2 \text{Volume}/\xi^2$.

The difference of the free energy of the configuration obtained above is

$$F[\psi] - F[\text{uniform}] = K_2 \int dz [\psi'(z)]^2 \sim K_2 \xi [1/\xi]^2 \sim K_2/\xi > 0 \quad (6)$$

where I made use of (3) ; I have used that $\psi'(z) \sim 1/\xi$ on a width $\sim \xi$.

The configuration for the non uniform field has a higher free energy due to the elastic cost.

2 Effet FFLO et phase modulée

Notre point de départ est la fonction de Ginzburg-Landau pour l'énergie libre par unité de surface

$$F[\phi(x)] = \int_0^L dx \left\{ \frac{\sigma}{4} [\partial_x^2 \phi(x)]^2 + \frac{g}{2} [\partial_x \phi(x)]^2 + f_L(\phi(x)) \right\} \quad \text{avec } \sigma > 0 \quad (7)$$

et

$$f_L(\phi) = \frac{a}{2}\phi^2 + \frac{b}{4}\phi^4 \quad \text{avec } b > 0. \quad (8)$$

et $a = \tilde{a}(T - T_c)$.

Le point intéressant à étudier ici vient de ce que g peut changer de signe. Expliquons cela grossièrement : si g est négatif, il est intéressant de maximiser le terme $g[\partial_x \phi(x)]^2$, i.e. les variations spatiales du champ. Pour stabiliser le modèle, on a ajouté le terme $\sigma[\partial_x^2 \phi(x)]^2$ avec $\sigma > 0$. Une modulation sur une longueur d'onde λ donne $\sigma[\partial_x^2 \phi(x)]^2 + g[\partial_x \phi(x)]^2 \sim [\sigma/\lambda^4 + g/\lambda^2]\phi^2$. Pour $g < 0$, cette contribution est minimum pour $\lambda \sim \sqrt{\sigma/|g|}$.

Phases uniformes (transition normal/supra).— Considérons $\phi(x) = \phi_0$ uniforme.

1/ Dans l'approche de Landau, la configuration du champ minimise l'énergie libre de Landau. Pour la configuration uniforme on doit résoudre $f_L(\phi) = 0$ i.e.

$$\phi (a + b\phi^2) = 0 \quad (9)$$

- Si $a > 0$ (i.e. $T > T_c$), la solution est $\phi_0 = 0$ (phase normale).
- Si $a < 0$ (i.e. $T < T_c$), la solution est (à un \pm près)

$$\phi_0 = \sqrt{-a/b} \propto (T_c - T)^{1/2} \quad (10)$$

C'est la phase supra.

Le paramètre d'ordre s'annule à la transition. C'est une "transition continue" ou "du second ordre".

2/ On calcule l'énergie libre par unité de volume correspondante, $f_0 = F[\phi_0]/L$:

$$f_0 = \begin{cases} 0 & \text{pour } T > T_c \\ -\frac{a^2}{4b} & \text{pour } T < T_c \end{cases} \quad (11)$$

Phase modulée (transition normal/FFLO).— Étudions à quelle(s) condition(s) la solution modulée $\phi_m(x) = \phi_1 \cos(qx)$ est favorable.

3/ On injecte la forme dans la fonctionnelle de Ginzburg-Landau et on obtient

$$f_m = F[\phi_m(x)]/L = \frac{\phi_1^2}{4} \left(a + g q^2 + \frac{\sigma}{2} q^4 \right) + \frac{3b}{32} \phi_1^4 \quad (12)$$

4/ Dans l'esprit de la théorie de Landau, la solution minimise l'énergie libre. On minimise f_m vis-à-vis des deux paramètres q et ϕ_1 :

$$\frac{\partial f_m}{\partial q} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_m}{\partial \phi_1} = 0 \quad (13)$$

d'où

$$\phi_1^2 q (g + \sigma q^2) = 0 \quad \text{et} \quad \phi_1 \left[a + g q^2 + \frac{\sigma}{2} q^4 + \frac{3b}{4} \phi_1^2 \right] = 0. \quad (14)$$

si $g > 0$, la première solution impose $q = 0$. On obtient une solution $q > 0$ ssi $g < 0$.

$$q = \sqrt{\frac{-g}{\sigma}} \quad (15)$$

5/ On injecte cette forme dans l'équation pour ϕ_1 :

$$\phi_1 \left[a - \frac{g^2}{2\sigma} + \frac{3b}{4} \phi_1^2 \right] = 0 \quad (16)$$

- Si $a - \frac{g^2}{2\sigma} > 0$, la solution est $\phi_1 = 0$ (phase normale).
- Si $a - \frac{g^2}{2\sigma} < 0$, la solution est (au \pm près)

$$\phi_1 = 2 \sqrt{\frac{1}{3b} \left(-a + \frac{g^2}{2\sigma} \right)} \propto \sqrt{T_m - T} \quad (17)$$

avec

$$T_m = T_c + \frac{g^2}{2\sigma \tilde{a}} \quad (18)$$

La transition vers la phase modulée (FFLO) se produit au dessus de T_c .

6/ La transition normal/FFLO est encore une transition "continue", i.e. du **second ordre**.

7/ L'énergie libre de la phase FFLO est (pour $T < T_m$)

$$f_m = -\frac{1}{6b} \left(a - \frac{g^2}{2\sigma} \right)^2 = -\frac{\tilde{a}^2}{6b} (T_m - T)^2 \quad (19)$$

Transition supra/FFLO.— Comparons la phase supra (uniforme) et la phase FFLO

8/ si $a < 0$, la solution uniforme $\phi_0 = \sqrt{-a/b}$ est possible, d'énergie libre $f_0 = -\frac{a^2}{4b}$.

D'autre part, pour $a < \frac{g^2}{2\sigma}$, la phase FFLO est possible, avec $f_m = -\frac{1}{6b} \left(a - \frac{g^2}{2\sigma}\right)^2 \simeq -\frac{a^2}{6b}$ pour $a \rightarrow -\infty$.

Autour de $a = 0$, il est clair que la phase FFLO est favorable, mais si $a \rightarrow -\infty$, la phase supra uniforme est plus favorable que la phase FFLO. Il doit donc y a avoir une transition entre la phase supra uniforme et la phase FFLO, pour une valeur de $a < 0$. La transition se produit pour $f_0 = f_m$ i.e.

$$\left[a \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \right) + \frac{g^2}{2\sigma} \right] \left[a \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + 1 \right) - \frac{g^2}{2\sigma} \right] = 0 \quad (20)$$

La solution (avec $a < 0$) est

$$a = -\frac{1}{\sqrt{6}-2} \frac{g^2}{\sigma} \quad (21)$$

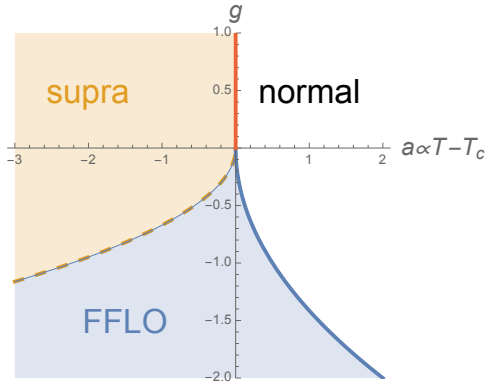
9/ Sur la ligne de transition $\frac{g^2}{\sigma} = -(\sqrt{6}-2)a$ d'où $\phi_1^2 = \frac{2\sqrt{6}-a}{3}$. La transition supra/FFLO est *discontinue* : q passe d'une valeur finie à zéro et l'amplitude aussi est discontinue et passe de $\phi_1 = \sqrt{\frac{2\sqrt{6}}{3}} \sqrt{-a/b}$ à $\phi_0 = \sqrt{-a/b}$. La transition est du **premier ordre**.

Diagramme de phases.— Le diagramme de phases est obtenu en identifiant les zones où existent les différentes phases dans l'espace des paramètres. Ici, on considère le plan (a, g) :

10/ **Ligne normal/supra** : pour $g > 0$, seule la transition normal/supra (2nd ordre) se manifeste, pour $a = 0$ (ligne verticale semi-infinie).

Ligne normal/FFLO : Pour $g < 0$ on a vu que la ligne de transition (2nd ordre) est $a = \frac{g^2}{2\sigma}$: c'est un arc de parabole partant de l'origine.

Ligne FFLO/supra : Pour $g < 0$, on vient de montrer que la transition (1er ordre) se produit pour $a = -\frac{1}{\sqrt{6}-2} \frac{g^2}{\sigma}$: un autre arc de parabole partant de l'origine.



Les lignes continues correspondent aux transitions du 2n ordre et la ligne pointillée est du premier ordre.

Le point d'intersection des trois lignes est appelé un point **tri-critique**.

11/ Exposants critiques au point tri-critique.

Si $g \geq 0$ on a vu que $\phi_0 \propto \sqrt{T_c - T} \propto (-a)^\beta$ avec $\beta = 1/2$.

Si $g < 0$, on a $\phi_1 \propto \sqrt{T_m - T}$, qui fait apparaître le même exposant $\beta = 1/2$. Mais si l'on approche le point tri-critique dans une autre direction, en faisant $a = 0$ et $g \rightarrow 0^-$ (tangente aux deux lignes) alors $\phi_1 \propto \sqrt{g^2/(b\sigma)} \propto (-g)^{\beta'}$ pour l'exposant $\beta' = 1$.

Commentaire : Ce type de transitions est appelée une **transition de Lifshitz** (ou transition tri-critique). Elles apparaissent dans des contextes très variés :

- en supra donc, avec l'apparition de la phase FFLO.
- Des systèmes magnétiques frustrés.
- Les cristaux liquides présentent plusieurs points tri-critiques, entre différentes phases smectiques.
- Dans les problèmes d'instabilités de parois de domaine.
- Et même en QCD ; à ce propos, on pourra consulter l'article : Robert D. Pisarski, Vladimir V. Skokov and Alexei Tsvetik. *A Pedagogical introduction to the Lifshitz regime*, Universe, **5**(2), p. 48, (2019). doi:10.3390/universe5020048, disponible sur internet.