

EXAMEN DE PHYSIQUE STATISTIQUE

Mercredi 15 Mars 2023

Durée de l'épreuve : **2h.**

L'utilisation de documents, calculatrices, téléphones portables, ... est interdite.

Recommandations :

Lisez attentivement l'énoncé et rédigez *succinctement* et *clairement* votre réponse.

Vérifiez vos calculs (analyse dimensionnelle, etc) ; n'oubliez pas de vous **relire**.

Pensez aux **informations en annexe**.

Questions de cours (~ 10mn)

- 1/ Donner la formule générale pour l'entropie statistique (formule de Gibbs-Shannon) associée à une distribution de probabilité $\{P_\ell\}$.
- 2/ Rappeler le postulat fondamental de la physique statistique. À quelle distribution $\{P_\ell^*\}$ cela correspond-t-il ?
- 3/ Dédurre l'expression de l'entropie microcanonique.

Problème 1 : Oscillateurs harmoniques (~ 45mn)

- 1/ **Préliminaire (questions de cours) :** On note $|\ell\rangle$ les microétats et E_ℓ les énergies.
 - a) Rappeler la définition de la fonction de partition canonique Z .
 - b) On suppose que le niveau E_ℓ a une dégénérescence g_ℓ . Réécrire Z sous la forme d'une somme sur les *niveaux d'énergie* (plutôt que sur les *états*).
 - c) En partant de la distribution canonique, démontrer la formule permettant de déduire l'énergie moyenne \overline{E}^c de la fonction de partition Z (comme fonction de $\beta = 1/(k_B T)$).
 - d) Exprimer la fonction de partition $Z_{1\otimes 2}$ d'un système formé de deux sous-systèmes \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 *indépendants*, en fonction des fonctions de partition Z_1 et Z_2 , caractérisant les systèmes séparément.
- 2/ On considère un oscillateur harmonique quantique unidimensionnel. Le spectre des énergies est $\varepsilon_n = \hbar\omega(n + 1/2)$, $n \in \mathbb{N}$. Calculer la fonction de partition canonique z de l'oscillateur.
- 3/ On considère maintenant N oscillateurs 1D indépendants, identiques (et discernables). Exprimer la fonction de partition canonique du système Z_N en fonction de z .
- 4/ Calculer l'énergie moyenne \overline{E}^c en fonction de T et N . Analyser les comportements pour $T \gg \hbar\omega/k_B$ et $T \ll \hbar\omega/k_B$. Tracer *soigneusement* \overline{E}^c en fonction de T et interpréter physiquement les comportements limites.
- 5/ Dans les deux dernières questions, on discute la relation avec les résultats microcanoniques. À partir de l'expression de Z_N , retrouver le spectre des énergies et les dégénérescences des niveaux d'énergie du problème à N oscillateurs.
Indication : Développer Z_N à l'aide du développement de Taylor $(1-x)^{-\alpha} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+m)}{m!\Gamma(\alpha)} x^m$.
On rappelle que $\Gamma(n+1) = n!$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- 6/ **BONUS :** Dédurre l'expression de la température *microcanonique* T^* [on pourra l'exprimer en fonction de N et M où $E = \hbar\omega(M + N/2)$].

Problème 2 : Équations d'état pour des gaz sur réseau ($\sim 60mn$)

Nous étudions un modèle de gaz sur réseau dans lequel l'espace des états est identifié avec l'espace des configurations dans l'espace (i.e. nous ignorons l'énergie cinétique des particules). Nous considérons N particules dans une boîte de volume V , divisée (par la pensée) en M cellules de volume v , i.e.

$$V = Mv$$

Les différents microétats correspondent simplement aux différentes manières de remplir les M cellules avec les N particules.

Les particules sont **indiscernables** (elles n'ont pas d'individualité; on ne peut pas les indiquer). Dans le modèle de gaz sur réseau, un microétat est donc caractérisé par les *occupations* des M cases. Nous allons voir que ce modèle très simple prédit des déviations à la loi universelle des gaz parfaits classiques. Le système est supposé **isolé** et à l'équilibre thermodynamique.

Gaz de fermions.— Pour tenir compte de la nature fermionique des particules on considère que chacune des M cases est soit vide soit occupée par une unique particule (principe de Pauli).

1/ **Nombre de microétats.**— On note $\Omega_f(N, M)$ le nombre de microétats accessibles pour N fermions dans les M cases.

Représenter tous les microétats pour $N = 2$ fermions occupant $M = 4$ cases.

Donner l'expression générale de $\Omega_f(N, M)$ (nombre de manières de choisir N cases occupées et $M - N$ cases vides).

2/ **Entropie.**— Dédurre l'expression de l'entropie microcanonique des fermions $S_f^*(N, M)$ dans la limite $M \gg 1$ et $N \gg 1$.

3/ **Équation d'état.**— Rappeler la définition de la pression microcanonique. Montrer que la pression du gaz de fermions s'exprime en fonction de la densité moyenne $\rho = N/V$ comme

$$p_f^* = -\frac{k_B T^*}{v} \ln(1 - \rho v). \quad (1)$$

4/ Rappeler la définition du potentiel chimique microcanonique. Exprimer le potentiel chimique des fermions μ_f^* en fonction de $k_B T^*$ et ρv .

Gaz de bosons.— On considère maintenant le gaz de bosons. Un nombre arbitraire de bosons peut occuper une case (cf. figure). On peut représenter un microétat en terme des M occupations des cases $\{n_i\}_{i=1, \dots, M}$ où $n_i \in \{0, 1, \dots, N\}$ est le nombre de bosons dans la case i .

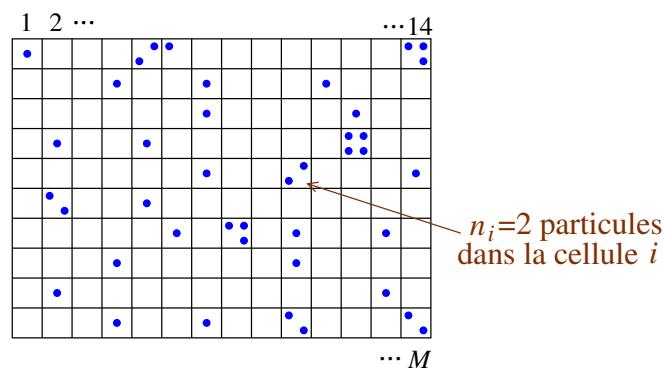


FIGURE 1 : Gaz de $N = 41$ bosons sur un réseau de $M = 140$ cellules.

5/ **Nombre de microétats.**— Représenter tous les microétats pour $N = 2$ bosons dans $M = 4$ cases.

Dans le cas général $\Omega_b(N, M)$ correspond au nombre de manières pour répartir les N bosons dans les M cases. Donner son expression.

Indication : On peut utiliser le même truc que celui vu au TD3 pour le comptage de la dégénérescence du N ème niveau excité de M oscillateurs harmoniques quantiques 1D, ce qui correspond au nombre de façons de partitionner l'entier $N = \sum_{i=1}^M n_i$ en M entiers n_i .

6/ **Entropie.**— Dédurre l'entropie microcanonique des bosons $S_b^*(N, M)$ dans la limite $M \gg 1$ et $N \gg 1$.

7/ **Équation d'état.**— Montrer que la pression du gaz de bosons sur réseau est

$$p_b^* = \frac{k_B T^*}{v} \ln(1 + \rho v). \quad (2)$$

8/ Calculer le potentiel chimique des bosons μ_b^* et l'exprimer en fonction de $k_B T^*$ et ρv .

Conclusion

9/ **Limite diluée.**— Analyser les deux équations d'états, p_b^* et p_f^* , dans la limite diluée $\rho \ll 1/v$. Même question pour μ_f^* et μ_b^* . Commenter.

10/ Tracer *soigneusement* les deux pressions p_b^* et p_f^* en fonction de la densité ρ sur un même graphe. Expliquer physiquement la différence.

11/ **BONUS** : Analyser le comportement limite de μ_f^* pour $\rho \rightarrow 1/v$, puis le comportement limite de μ_b^* pour $\rho v \gg 1$. Comparer les deux courbes de μ_f^* et μ_b^* comme fonctions de ρ .

Relecture (~ 5mn)

Annexe

- Formule de Stirling : $\ln N! \simeq N \ln N - N$
- Identité fondamentale de la *thermodynamique* : $dE = T dS - p dV + \mu dN + \dots$