Ch. Texier
M1 Magistère de physique fondamentale – ENS PSay,

Correction de l'examen "Transitions de phase" de janvier 2023

1 Dynamique d'une transition de phase et scaling

On considère la fonctionnelle de Ginzburg-Landau pour un champ scalaire réel :

$$F[\phi(\vec{x})] = \int \mathrm{d}^d\vec{x}\, \left[g\,(\vec{\nabla}\phi)^2 + f_L(\phi) - h\phi\right] \tag{1}$$

où $f_L(\phi) = \frac{a}{2}\,\phi^2 + \frac{b}{4}\,\phi^4$ avec $a \propto (T - T_c)$ et $b > 0$.

1/ **Statique.—** Équation du champ : $\frac{\delta F}{\delta\phi(\vec{x})} = 0 \Rightarrow -2g\Delta\phi + f_L'(\phi) = h$, explicitement

$$-2g\Delta\phi + a\phi + b\phi^3 = h \tag{2}$$

2/ Cas homogène $\phi(\vec{x}) \to \phi$ avec $h = 0$: l'équation devient $(a + b\phi^2)\phi = 0$. On note ϕ_0 la solution positive.
• Si $a > 0$ ($T > T_c$) on a $\phi_0 = 0$.
• Si $a < 0$ ($T < T_c$) on a $\phi_0 = \sqrt{-a/b}$.

3/ **Dynamique.–** On considère maintenant le modèle d'évolution temporelle

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{x}, t) = -\Gamma\,\frac{\delta F}{\delta\phi(\vec{x})}[\phi(\vec{x}, t)] \tag{3}$$

(où $\Gamma > 0$ est le paramètre de Khalatnikov) qui décrit une dynamique sur-amortie (forte friction) et néglige les fluctuations temporelles (pas de bruit). On a déjà calculé $\frac{\delta F}{\delta\phi(\vec{x})} = -2g\Delta\phi + f_L'(\phi) - h$, donc

$$\partial_t\phi = \Gamma\left(2g\Delta\phi - f_L'(\phi)\right) + \Gamma\, h \tag{4}$$

4/ Analyse linéaire (pour $h \to 0$) autour de ϕ_0. On pose $\phi(\vec{x}, t) = \phi_0 + \varphi(\vec{x}, t)$, avec $\varphi \to 0$. On obtient

$$\partial_t\varphi \simeq \Gamma\left(2g\Delta - f_L''(\phi_0)\right)\varphi + \Gamma\, h \tag{5}$$

On identifie $f_L''(\phi_0)/(2g) = \xi^{-2}$ comme l'inverse d'une longueur au carré.

Si $T > T_c$ on a $f_L''(\phi_0) = f_L''(0) = a$ et si $T < T_c$ on obtient $f_L''(\phi_0) = a + 3b\phi_0^2 = -2a$. On peut écrire $a(\theta) = a(1)\,\theta$ avec $\theta = (T - T_c)/T_c$, d'où

$$\xi(\theta) = \sqrt{\frac{2g}{f_L''(\phi_0)}} = \xi(1) \times \begin{cases} 1/\sqrt{\theta} & \text{si } \theta > 0 \\ 1/\sqrt{-2\theta} & \text{si } \theta < 0 \end{cases} \tag{6}$$

5/ Analyse de Fourier ; on introduit la TF spatiale $\hat{\varphi}(\vec{q}, t) = \int \mathrm{d}^d\vec{x}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{q}\cdot\vec{x}}\,\varphi(\vec{x}, t)$. L'équation linéarisée prend la forme

$$\partial_t\hat{\varphi}(\vec{q}, t) = -2g\Gamma\left(\vec{q}^{\,2} + \xi^{-2}\right)\hat{\varphi}(\vec{q}, t) + \Gamma\,\hat{h}(\vec{q}, t) \tag{7}$$

i.e. une équation linéaire du premier ordre avec second membre. Facile ! On introduit

$$1/\tau_q \stackrel{\text{def}}{=} D\,\left(\vec{q}^{\,2} + \xi^{-2}\right) \qquad \text{avec } D = 2g\Gamma \tag{8}$$

la constante de diffusion. La solution est

$$\hat{\varphi}(\vec{q},t) = \hat{\varphi}(\vec{q},0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau_q} + \Gamma\int_0^t \mathrm{d}t'\,\hat{h}(\vec{q},t')\,\mathrm{e}^{-(t-t')/\tau_q} \tag{9}$$

Génériquement, on attend la forme

$$\hat{\varphi}(\vec{q},t) = \hat{\varphi}(\vec{q},0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau_q} + \int_0^t \mathrm{d}t'\,\widehat{\chi}(\vec{q},t-t')\,\hat{h}(\vec{q},t') \tag{10}$$

pour l'équation linéaire, où $\widehat{\chi}(\vec{q},t)$ est la *fonction de réponse dynamique*. Ici on a donc

$$\widehat{\chi}(\vec{q},t) = \theta_{\mathrm{H}}(t)\,\Gamma\,\mathrm{e}^{-t/\tau_q} \tag{11}$$

où j'ai introduit la fonction de Heaviside pour insister sur l'importante propriété de *causalité*.

6/ **Scaling.—** Concentrons nous sur l'analyse du temps caractéristique $\tau_q = G(q,\theta)$, fonction de $q = ||\vec{q}||$ (isotropie) et T. Dans le cas général, l'hypothèse de scaling prend donc la forme

$$\tau_q(\theta) = G(q,\theta) = \ell^z\,G(\ell\,q,\ell^{1/\nu}\theta) \tag{12}$$

où $\ell > 0$ est un facteur de dilatation d'échelle. $G(x,y)$ est une fonction d'échelle, z l'exposant dynamique et ν l'exposant de la longueur de corrélation $\xi \sim |\theta|^{-\nu}$. Si l'on pose $\ell = |\theta|^{-\nu}$, on obtient

$$\tau_q(\theta) = |\theta|^{-\nu z}\,F_\pm(|\theta|^{-\nu}\,q) \tag{13}$$

avec $\pm = \mathrm{sign}(\theta)$ et $F_\pm(y) = G(y,\pm 1)$.

7/ On souhaite que pour $q \to 0$, le temps ait une limite finie et soit une loi de puissance de θ. Il faut simplement que $F_\pm(0) = \mathrm{cste}$, d'où $\tau_0(\theta) \sim |\theta|^{-\nu z}$. Ce temps caractérise la relaxation du paramètre d'ordre à température T. Lorsque $T \to T_c$, les corrélations du champ sont de portée de plus en plus grande, $\xi \to \infty$, et donc la relaxation sur ces grands domaines prend un temps de plus en plus grand. On parle de *ralentissement critique*.

De même, pour $T \to T_c$ obtenir une limite finie requiert $F_\pm(y) \sim y^{-z}$, ainsi $\tau_q(0) \sim q^{-z}$.

Illustration pour la théorie de champ moyen : on a obtenu $1/\tau_q \stackrel{\mathrm{def}}{=} D\left(q^2 + \xi^{-2}\right)$ où ξ est donnée plus haut, ce qui montre que

$$\nu = 1/2 \qquad \text{et} \qquad z = 2\,. \tag{14}$$

Les deux fonctions sont

$$F_+(y) = \frac{1}{Dy^2 + \xi(1)^{-2}} \qquad \text{et} \qquad F_-(y) = \frac{1}{Dy^2 + 2\xi(1)^{-2}} \tag{15}$$

8/ Bonus : **Dynamique conservative.—** On considère l'équation dynamique

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{x},t) = \gamma\,\Delta\frac{\delta F}{\delta\phi(\vec{x})}[\phi(\vec{x},t)] \qquad \text{avec } \gamma > 0\,, \tag{16}$$

qui conserve $\Phi = \int_V \mathrm{d}^d\vec{r}\,\varphi(\vec{x},t)$. Explicitement :

$$\partial_t\phi = \gamma\left(-2g\Delta^2\phi + \Delta f_L'(\phi)\right) - \gamma\,\Delta h \tag{17}$$

L'analyse linéaire donne

$$\partial_t\varphi \simeq 2g\gamma\left(-\Delta^2 + \xi^{-2}\Delta\right)\varphi - \gamma\,\Delta h \tag{18}$$

ce qui permet d'identifier le temps caractéristique très facilement

$$1/\tau_q = 2g\gamma\, q^2(q^2 + \xi^{-2}) \tag{19}$$

Cette fois $\tau_q \to \infty$ pour $q \to 0$ (à θ finie) : ce qui vient de la loi de conservation $\Phi = \int_V \mathrm{d}^d\vec{r}\,\varphi(\vec{x},t) = \text{cste}$ (en effet, τ_0 caractérise la relaxation du mode à $q=0$... qui ne relaxe pas pour ce modèle de dynamique conservative).

Aux petites échelles $\ll \xi$ (i.e. $q \gg \xi^{-2}$), où à $T = T_c$, on a $\tau_q \sim q^{-4}$ d'où $z = 4$.

Aux grandes échelles $\gg \xi$ (et à $T \neq T_c$), on trouve $\tau_q \sim q^{-2}$ d'où $z = 2$.

Ce deuxième exemple illustre la richesse des modèles de dynamiques : différents problèmes physiques peuvent avoir les mêmes exposants critiques statiques, mais des exposants dynamiques différents.

Les propriétés statiques définissent donc des classes d'universalités plus larges que les propriétés dynamiques.

2 Soliton dans un ferroélectrique unidimensionnel

** Ce problème reprend des sujets proposés par Nicolas Pavloff et Guillaume Roux. **

On étudie le champ $\phi(x)$ auquel est associé l'énergie

$$H_{\text{pot}}[\phi] = K\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \left[\frac{c^2}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 + U(\phi(x))\right] \tag{20}$$

où $U(\phi)$ est une potentiel ; $c > 0$ est une vitesse et $K > 0$. Pour l'instant on suppose seulement que $U(\phi)$ a deux minima en $\pm\phi_0$ avec $U(\pm\phi_0) = 0$ et que $U(\phi) \geqslant 0$.

1/ La solution qui minimise l'énergie satisfait $\delta H_{\text{pot}}[\phi]/\delta\phi(x) = 0$. C'est analogue à la théorie de Ginzburg-Landau, où l'on doit plutôt minimiser l'énergie libre de Ginzburg-Landau (i.e. une énergie libre "réduite" ou "incomplète"). Explicitement, on obtient ici

$$-c^2\phi''(x) + U'(\phi(x)) = 0 \tag{21}$$

une équation différentielle du second ordre non linéaire (difficile *a priori*)

2/ On profite du fait qu'on est en 1D : si on introduit $\mathcal{E}_0 = \frac{c^2}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 - U(\phi(x))$, on voit que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathcal{E}_0 = \phi'(x)\times$(équation du champ)$= 0$. On a identifié une quantité conservée.

3/ On utilise l'analogie avec la mécanique newtonienne :

- $x \longrightarrow$ "temps"
- $\phi \longrightarrow$ "position"
- $c^2 \longrightarrow$ "masse"
- $U'(\phi) \longrightarrow$ "force" $\Rightarrow -U(\phi) \longrightarrow$ "énergie potentielle"
- $\mathcal{E}_0 \longrightarrow$ "énergie mécanique"

C'est le problème du mouvement d'une particule de position ϕ dans le potentiel $-U(\phi)$. Le "potentiel" a maintenant deux maxima en $\pm\phi_0$, où il s'annule.

Si $|\phi(x)| \leqslant \phi_0\ \forall x \in \mathbb{R}$, la particule doit rester confinée à tout temps sur $[-\phi_0, +\phi_0]$. "L'énergie mécanique" doit donc être négative, $\mathcal{E}_0 \leqslant 0$ pour que $\phi(x)$ reste confinée dans le puits de $-U(\phi)$. Elle doit par conséquent être aussi bornée inférieurement par le bas du puits. Finalement $\min\limits_{\phi\in[-\phi_0,+\phi_0]}\big\{-U(\phi)\big\} \leqslant \mathcal{E}_0 \leqslant 0$.

Pour construire la solution on écrit

$$\frac{c^2}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \mathcal{E}_0 + U(\phi(x)) \quad \text{d'où } \frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}x} = \pm\frac{1}{c}\sqrt{2(\mathcal{E}_0 + U(\phi(x)))} \tag{22}$$

On peut intégrer l'équation

$$\int^{\phi(x)} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{2(\mathcal{E}_0 + U(\phi))}} = \pm\frac{x}{c} + \mathrm{cste} \tag{23}$$

4/ **Paroi de domaine.—** Si $\phi(x \to \mp\infty) = \pm\phi_0$, alors $\mathcal{E}_0 = -U(\pm\phi_0) = 0$.

5/ On construit la solution qui va de $\phi(-\infty) = +\phi_0$ à $\phi(+\infty) = -\phi_0$ (en un temps infini) et passe par zéro, $\phi(0) = 0$, pour le potentiel

$$U(\phi) = \frac{\omega_0^2}{\phi_0^2}\left(\phi_0^2 - \phi^2\right)^2 . \tag{24}$$

D'après (23), on a

$$\frac{\phi_0}{\sqrt{2}\omega_0}\int_0^{\phi(x)} \frac{\mathrm{d}\phi}{\phi_0^2 - \phi^2} = -\frac{x}{c} \quad \text{d'où } \operatorname{argth}(\phi(x)/\phi_0) = -\frac{\sqrt{2}\omega_0 x}{c} \tag{25}$$

i.e.

$$\phi(x) = -\phi_0 \tanh\left(\sqrt{2}\omega_0 x/c\right) \tag{26}$$

Dynamique.— On s'intéresse maintenant aux aspects dynamiques. On ajoute un terme cinétique dans l'énergie

$$H[\phi] = H_{\mathrm{cin}}[\phi] + H_{\mathrm{pot}}[\phi] = K\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{c^2}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + U(\phi)\right] \tag{27}$$

pour un champ $\phi(x,t)$. L'équation du champ, obtenue en minimisant une *action*, est maintenant

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - U'(\phi) . \tag{28}$$

6/ **Soliton.—** On cherche une solution qui se propage à vitesse v sans se déformer. On injecte la forme $\phi(x,t) = \psi(x - vt)$ dans l'équation du champ : en utilisant que $\partial_t\phi(x - vt) = -v\partial_x\phi(x - vt)$ on déduit

$$-(c^2 - v^2)\psi''(x) + U'(\psi(x)) = 0 \tag{29}$$

Autrement dit on se ramène au problème similaire au cas statique. Cette fois la constante du mouvement est

$$\mathcal{E}_v = \frac{c^2 - v^2}{2}\left[\psi'(x)\right]^2 - U(\psi(x)) \tag{30}$$

7/ On s'intéresse à une solution du type "soliton", telle que $\phi(-\infty,t) = +\phi_0$ et $\phi(+\infty,t) = -\phi_0$. D'où $\mathcal{E}_v = 0$. Puisque $-U(\psi(x)) \leqslant 0$, il faut que le premier terme soit positif, d'où $|v| < c$. Les solitons ont donc une vitesse $v \in [-c, +c]$.

8/ Pour trouver $\psi(x)$, on procède comme précédemment, donc

$$\int^{\psi(x)} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{2(\mathcal{E}_v + U(\psi))}} = \pm\frac{x}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \mathrm{cste} \tag{31}$$

d'où, pour $\mathcal{E}_v = 0$ et avec le potentiel quartique $\psi(x) = -\phi_0 \tanh\left(\sqrt{2}\omega_0 x/\sqrt{c^2 - v^2}\right)$ et donc

$$\boxed{\phi(x,t) = -\phi_0 \tanh\left(\frac{\sqrt{2}\omega_0(x - vt)}{\sqrt{c^2 - v^2}}\right)} \tag{32}$$

9/ On calcule l'énergie du soliton $E_s(v) = H[\phi(x,t)]$. En utilisant à nouveau $\partial_t\phi(x - vt) = -v\partial_x\phi(x - vt)$ et l'équation du champ à $\mathcal{E}_v = 0$, i.e. $\frac{c^2-v^2}{2}\left[\partial_x\phi\right]^2 = U(\phi)$, on trouve

$$E_s(v) = Kc^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 = \frac{2Kc^2\phi_0^2\omega_0^2}{c^2 - v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^4(\sqrt{2}\omega_0(x - vt)/\sqrt{c^2 - v^2})} \tag{33}$$

d'où

$$E_s(v) = \frac{4\sqrt{2}}{3} \frac{Kc^2\phi_0^2\omega_0}{\sqrt{c^2 - v^2}} \tag{34}$$

C'est une relation de dispersion relativiste, $E = Mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, ce qui montre que le soliton a une masse

$$\boxed{M_s = \frac{4\sqrt{2}}{3} K\phi_0^2\omega_0} \tag{35}$$

Borne de Bogomol'nyi.— On pose $\boxed{K = c = 1}$ pour simplifier. Nous introduisons la densité d'énergie

$$\varepsilon(x,t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + U(\phi) \quad \text{et} \quad A(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial x} \tag{36}$$

10/

$$\partial_t\varepsilon + \partial_x A = \partial_t\phi\, \partial_t^2\phi + \partial_x\phi\, \partial_t\partial_x\phi + \partial_t\phi\, U'(\phi) - \partial_t\partial_x\phi\, \partial_x\phi - \partial_t\phi\, \partial_x^2\phi \tag{37}$$

$$= \partial_t\phi\, \left(\partial_t^2\phi - \partial_x^2\phi + U'(\phi)\right) = 0 \tag{38}$$

On intègre sur x, d'où

$$\partial_t E = \partial_t \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \varepsilon(x,t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \partial_x A(x,t) = -A(+\infty,t) + A(-\infty,t) = 0 \tag{39}$$

si $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ s'annule à l'infini.

11/ On a

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial\phi}{\partial x} \pm \sqrt{U(\phi)}\right)^2 \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + U(\phi) \geqslant \pm\frac{\partial\phi}{\partial x}\sqrt{2U(\phi(x))} \tag{40}$$

12/ **Borne de Bogomol'nyi.—** On considère $\phi(x,t)$ une solution quelconque de l'équation du champ (soliton ou autre). Son énergie $E = H[\phi(x,t)]$ satisfait

$$E \geqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + U(\phi)\right] \geqslant \pm\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \frac{\partial\phi}{\partial x}\sqrt{2U(\phi(x))} \tag{41}$$

La borne est plus intéressante si le membre de droite est positif.

On a supposé que $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ s'annule à l'infini, donc la solution va de $\phi(-\infty,t)=\pm\phi_0$ à $\phi(+\infty,t)=\pm\phi_0$. Dans ce cas on obtient

$$\boxed{E = H[\phi(x,t)] \geqslant \int_{-\phi_0}^{+\phi_0} \mathrm{d}\phi\, \sqrt{2U(\phi)} \equiv E_B} \tag{42}$$

Insistons : la borne de Bogomol'nyi s'applique pour n'importe quel type de solution (pas seulement les solitons). La seule hypothèse importante est que $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ s'annule à l'infini.

13/ La borne de Bogomol'nyi est saturée pour $\frac{\partial\phi}{\partial x} = \pm\sqrt{2U(\phi)}$, ce qui est précisément l'équation pour la paroi de domaine statique.

14/ Pour le potentiel (24), la borne est $E_B = \sqrt{2}(\omega_0/\phi_0)\int_{-\phi_0}^{+\phi_0}\mathrm{d}\phi\,(\phi_0^2-\phi^2) = 4\sqrt{2}\omega_0\phi_0^2/3$, ce qui correspond bien au soliton de vitesse nulle $E_s(v=0)$, i.e. à la paroi de domaine.

On a ainsi montré que le soliton statique est la solution d'énergie minimale.

Notice biographique : après un début de carrière à Moscou, **Evgeny Borisovich Bogomol'nyi** (Eugène Bogomolny) est rentré au CNRS dans les années 1990 (à la division de physique théorique de l'IPN d'Orsay, puis au LPTMS à sa création). Il était alors déjà connu pour ses travaux en théorie des champs et intégrabilité : par exemple, il y a aussi des équations de Bogomolny décrivant le point particulier où $\kappa = \lambda_L/\xi = 1/\sqrt{2}$ des équations de Ginzburg-Landau de la supraconductivité. Il a fait des contributions très importantes dans le domaine du chaos quantique.