M1 Magistère de physique fondamentale – ENS PSay,

Option Transitions de phase – Examen

Vendredi 13 janvier 2023

Durée : 3h

L'utilisation de documents, calculatrices, téléphones portables,... est interdite.

Recommandations :

Lisez attentivement l'énoncé et rédigez *succinctement* et *clairement* votre réponse.
n'oubliez pas de vous **relire**.

1 Dynamique d'une transition de phase et scaling

On considère la fonctionnelle de Ginzburg-Landau pour un champ scalaire réel :

$$F[\phi(\vec{x})] = \int \mathrm{d}^d\vec{x}\,\left[g\,(\vec{\nabla}\phi)^2 + f_L(\phi) - h\phi\right] \tag{1}$$

où $f_L(\phi) = \frac{a}{2}\,\phi^2 + \frac{b}{4}\,\phi^4$ avec $a \propto (T - T_c)$ et $b > 0$. Le champ conjugué h pourra être inhomogène. Nous allons reprendre l'étude d'un modèle pour décrire la dynamique du champ, dans le cadre de l'approximation de champ moyen, avant d'élargir la question et discuter les lois d'échelles contrôlant la relaxation.

1/ **Statique.**— Dériver l'équation du champ.

2/ Résoudre l'équation du champ dans le cas uniforme $\phi(\vec{x}) \to \phi$ indépendant de la position x et pour $h = 0$. On note ϕ_0 la solution positive (ou nulle) ; distinguer $a > 0$ et $a < 0$.

3/ **Dynamique.**– On considère maintenant le modèle d'évolution temporelle

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{x},t) = -\Gamma\,\frac{\delta F}{\delta\phi(\vec{x})}[\phi(\vec{x},t)] \tag{2}$$

où $\Gamma > 0$ est le paramètre de Khalatnikov. Ecrire explicitement cette équation pour un champ conjugué $h(\vec{x},t)$.

4/ Si $h(\vec{x},t)$ est "petit", on peut linéariser l'équation précédente autour de la solution uniforme : $\phi(\vec{x},t) = \phi_0 + \varphi(\vec{x},t)$, avec $\varphi \to 0$. Donner l'équation (linéaire) pour $\varphi(\vec{x},t)$, où l'on fera apparaître $f_L''(\phi_0)$. Rappeler le lien entre $f_L''(\phi_0)$ et la longueur de corrélation ξ. Déduire $\xi(\theta)$ en fonction de $\theta = (T - T_c)/T_c$ et $\xi(1)$ (distinguer $\theta > 0$ et $\theta < 0$).

5/ On introduit la TF $\hat{\varphi}(\vec{q},t) = \int \mathrm{d}^d\vec{x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{q}\cdot\vec{x}}\,\varphi(\vec{x},t)$. Justifier que la solution peut s'écrire

$$\hat{\varphi}(\vec{q},t) = \hat{\varphi}(\vec{q},0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau_q} + \int_0^t \mathrm{d}t'\,\widehat{\chi}(\vec{q},t-t')\,\hat{h}(\vec{q},t') \tag{3}$$

Montrer que $1/\tau_q = D(\vec{q}^{\,2} + \xi^{-2})$ et exprimer D en fonction des paramètres du problème. Que représente $\widehat{\chi}(\vec{q},t)$? Donner son expression.

6/ **Scaling.**— Dans le cas général, l'hypothèse de scaling pour τ_q prend la forme

$$\tau_q(\theta) = G(q,\theta) = \ell^z\,G(\ell\,q, \ell^{1/\nu}\theta) \tag{4}$$

où $\ell > 0$ est un facteur de dilatation d'échelle. $G(x,y)$ est une fonction d'échelle, z l'exposant dynamique et ν l'exposant de la longueur de corrélation $\xi \sim |\theta|^{-\nu}$. Justifier que l'hypothèse de scaling conduit à la forme $\tau_q(\theta) = |\theta|^a\,F_\pm(|\theta|^b q)$, où $\pm = \mathrm{sign}(\theta)$. Exprimer a et b en fonction de z et ν.

7/ Déduire les comportements limites de la fonction de scaling $F_\pm(y)$ (pour $y \to 0$ et $y \to \infty$) de telle sorte que $\tau_0(\theta)$ (pour $q = 0$) soit une puissance de θ et $\tau_q(0)$ (pour $T = T_c$) soit une puissance de q.

Expliquer physiquement pourquoi $\tau_0(\theta) \to \infty$ lorsque $T \to T_c$? Comment s'appelle ce phénomène ?

Pour la théorie de champ moyen étudiée plus haut, donner les exposants z et ν ainsi que les fonctions $F_\pm(y)$.

8/ Bonus : **Dynamique conservative.**— Pour certains types de transitions de phase, la grandeur $\Phi = \int_V \mathrm{d}^d\vec{r}\,\varphi(\vec{x},t)$ reste conservée au cours du temps (par exemple pour décrire les alliages binaires, mélanges de deux types d'atomes dont la proportion reste fixée). On peut justifier qu'un modèle de dynamique est alors

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{x},t) = \gamma\,\Delta \frac{\delta F}{\delta\phi(\vec{x})}[\phi(\vec{x},t)] \quad \text{avec } \gamma > 0\,. \tag{5}$$

Déduire l'expression de τ_q dans ce cas. Pourquoi $\tau_q \to \infty$ pour $q \to 0$ (à θ finie) ? Montrer qu'on peut introduire deux exposants dynamiques pour décrire la relaxation aux échelles $\gg \xi$ et $\ll \xi$.

2 Soliton dans un ferroélectrique unidimensionnel

On étudie un matériau ferroélectrique unidimensionnel. Un modèle simple consiste à décrire les atomes classiquement, localisés sur les sites d'un réseau cristallin et en interaction harmonique avec leurs plus proches voisins. En outre les atomes sont soumis à un potentiel local dû à l'environnement ionique, qui favorise deux positions d'équilibre $\pm\phi_0$ autour des sites du réseau, correspondant à des polarisations opposées du système. On note $\phi_i = X_i - X_i^{\mathrm{eq}}$ le déplacement de l'atome i par rapport à sa position d'équilibre ; l'énergie potentielle de la chaîne est donc $H_{\mathrm{pot}}[\{\phi_i\}] = \sum_i \left[\frac{k}{2}\left(\phi_{i+1}-\phi_i\right)^2 + V_0\left(\phi_0^2-\phi_i^2\right)^2\right]$ où k est une constante de raideur et $V_0 > 0$. Dans le problème, nous allons plutôt nous intéresser à une version *continue* du modèle, où $\phi(x)$ est un champ de déplacement atomique. Dans des unités appropriées, l'énergie prend la forme

$$H_{\mathrm{pot}}[\phi] = K\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,\left[\frac{c^2}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 + U(\phi(x))\right] \tag{6}$$

où le potentiel $U(\phi)$ sera spécifié plus tard ; $c > 0$ est une vitesse et $K > 0$. Pour l'instant on suppose seulement que $U(\phi)$ a deux minima en $\pm\phi_0$ avec $U(\pm\phi_0) = 0$ et que $U(\phi) \geqslant 0$.

1/ On cherche une solution $\phi(x)$ qui minimise l'énergie potentielle $H_{\mathrm{pot}}[\phi]$. Discuter l'analogie avec la théorie de Ginzburg-Landau et donner l'équation pour $\phi(x)$.

2/ Montrer que $\mathcal{E}_0 = \frac{c^2}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 - U(\phi(x))$ est une intégrale première (i.e. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathcal{E}_0 = 0$ pour la solution qui minimise $H_{\mathrm{pot}}[\phi]$).

3/ Si $|\phi(x)| \leqslant \phi_0\ \forall x \in \mathbb{R}$, justifier que $\mathcal{E}_0$ est bornée inférieurement *et* supérieurement. Expliquer comment construire la solution. (Indication : utiliser l'analogie avec la mécanique newtonienne.)

4/ **Paroi de domaine.**— On cherche une solution qui va de $\phi(-\infty) = +\phi_0$ à $\phi(+\infty) = -\phi_0$. Que vaut $\mathcal{E}_0$ dans ce cas ?

5/ On considère le potentiel

$$U(\phi) = \frac{\omega_0^2}{\phi_0^2}\left(\phi_0^2 - \phi^2\right)^2\,, \tag{7}$$

où ω_0 est une pulsation. Déduire la solution $\phi(x)$ décrivant la paroi de domaine en $x = 0$, i.e. telle que $\phi(0) = 0$.

Indication : on rappelle que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{argth}(x) = 1/(1-x^2)$.

Dans la suite du problème, on étudie les aspects dynamiques : si l'on revient au modèle discret, on doit ajouter un terme cinétique à l'énergie potentielle. L'énergie *totale* est maintenant $H = H_{\text{cin}} + H_{\text{pot}}$ où $H_{\text{cin}} = \frac{m}{2}\sum_i \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial t}\right)^2$, ce qui correspond dans la description continue à

$$H[\phi] = K\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{c^2}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + U(\phi)\right] \tag{8}$$

pour un champ $\phi(x,t)$. L'équation du champ, obtenue en minimisant une *action*, est maintenant

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - U'(\phi)\ . \tag{9}$$

6/ **Soliton.—** On cherche une solution qui se propage à vitesse v sans se déformer, i.e. de la forme $\phi(x,t) = \psi(x - vt)$. Donner l'équation satisfaite par $\psi(x)$. Identifier une nouvelle intégrale première $\mathcal{E}_v$.

7/ La solution du type "soliton" est telle que $\phi(-\infty,t) = +\phi_0$ et $\phi(+\infty,t) = -\phi_0$. Déduire la valeur de $\mathcal{E}_v$ associée à cette solution et montrer que la vitesse v est nécessairement bornée supérieurement.

8/ Construire explicitement $\psi(x)$ pour le potentiel (7) (fixer $\psi(0) = 0$) et donner la solution dépendant du temps $\phi(x,t)$.

9/ Calculer l'énergie du soliton $E_s(v) = H[\phi(x,t)]$ en fonction de la vitesse v. Montrer qu'on retrouve la relation de dispersion relativiste ; quelle est la "masse" du soliton ?

Indication : une intégrale utile est $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x/\cosh^4 x = 4/3$.

Borne de Bogomol'nyi

Dans cette dernière partie, nous montrons que la paroi de domaine est la solution d'énergie minimale. **On pose $K = c = 1$ pour simplifier.** Nous introduisons la densité d'énergie

$$\varepsilon(x,t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + U(\phi) \quad \text{et} \quad A(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{10}$$

10/ Montrer que si $\phi(x,t)$ est solution de l'équation du mouvement (9) on a

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \tag{11}$$

Déduire que l'énergie est conservée si $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ s'annule à l'infini.

11/ Montrer que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + U(\phi) \geqslant \pm \frac{\partial \phi}{\partial x}\sqrt{2U(\phi(x))} \tag{12}$$

12/ **Borne de Bogomol'nyi.—** Déduire que l'énergie de la solution est bornée

$$E = H[\phi(x,t)] \geqslant \int_{-\phi_0}^{+\phi_0} \mathrm{d}\phi\, \sqrt{2U(\phi)} \equiv E_B \tag{13}$$

13/ Vérifier que l'équation qui a permis de déterminer la paroi de domaine statique correspond à la borne de Bogomol'nyi.

14/ Calculer E_B pour le potentiel (7).

Solutions disponibles à `http://lptms.u-psud.fr/christophe_texier/`