Examen "Transitions de phase", 19/01/2024 – CORRECTION

1 Wetting transition

The substrate is at $z = 0$ and the fluid with density $n(z)$ above. The grand potential is

$$F_f[n(z)] = \int_0^\infty \mathrm{d}z \, \left[\frac{1}{2} g \left[\partial_z n(z)\right]^2 + f(n(z))\right] , \tag{1}$$

Additionally there is a surface term (interaction between the substrate and the fluid) :

$$f_{\text{subs}}(n_s) = a_0 + a_1 \frac{n_s}{\Delta n} + \frac{1}{2} a_2 \left(\frac{n_s}{\Delta n}\right)^2 \tag{2}$$

where $\Delta n = n_l - n_g$ and $n_s = n(z = 0)$ is the density of the fluid at the solid surface.

1/ The field equation is

$$\frac{\delta F_f}{\delta n(z)} = -g \, n''(z) + f'(n(z)) = 0 \tag{3}$$

We denote $n_*(z)$ its solution.

2/ We identify a conserved quantity :

$$\mathcal{E} = \frac{g}{2} \left[n'_*(z)\right]^2 - f(n_*(z)) \tag{4}$$

(independent of z). At infinity the density is that of the vapor, $n_*(z \to \infty) = n_g$, hence $\mathcal{E} = -f(n_g) = 0$. As a result, the solution satisfies

$$n'_*(z) = \pm\sqrt{2 \, f(n_*(z))/g} \, . \tag{5}$$

Note that the vapor density is the lowest, hence $n_*(z)$ decreases with z. Thus we should should the minus sign.

3/ Using $\mathcal{E} = 0$, i.e. $\frac{g}{2}\left[n'_*(z)\right]^2 = f(n_*(z))$, we find

$$F_f[n_*] = g \int_0^\infty \mathrm{d}z \, \left[n'_*(z)\right]^2 = -g \int_0^\infty \mathrm{d}z \, \frac{\mathrm{d}n_*(z)}{\mathrm{d}z} \sqrt{\frac{2}{g} f(n_*(z))} = \sqrt{2g} \int_{n_g}^{n_s} \mathrm{d}n \sqrt{f(n)} \tag{6}$$

4/ The field equation (3) takes the form

$$n'(z) = -\sqrt{\frac{2c}{g}} \, (n_l - n(z))(n(z) - n_g) \tag{7}$$

Careful with the sign ! Integration is easy. We write

$$\frac{\mathrm{d}n}{(n_l - n)(n - n_g)} = -\sqrt{\frac{2c}{g}} \, \mathrm{d}z \quad \text{i.e.} \quad \int_{n_s}^{n_*(z)} \mathrm{d}z \left(\frac{1}{n_l - n} + \frac{1}{n - n_g}\right) = -z/\xi \tag{8}$$

where $\xi = \sqrt{\frac{g}{2c}} \frac{1}{\Delta n}$. We get

$$\frac{n_*(z) - n_g}{n_l - n_*(z)} = \underbrace{\frac{n_s - n_g}{n_l - n_s}}_{=\delta} \, \mathrm{e}^{-z/\xi} \tag{9}$$

i.e

$$n_*(z) = \frac{n_g + n_l \, \delta \, \mathrm{e}^{-z/\xi}}{1 + \delta \, \mathrm{e}^{-z/\xi}} \tag{10}$$

We check that it decreases from $n_*(0) = n_s$ to $n_*(z \to \infty) = n_g$.

5/ If $n_s \gg n_g$, then $n_*(z) \simeq n_l \left[1 + e^{(z-z_0)/\xi}\right]^{-1}$ where $z_0 = \xi \log\big(\dfrac{n_s}{n_l - n_s}\big)$. It is a step function where the drop of the density occurs around z_0, on a scale ξ. Hence z_0 can be interpreted as the height of the liquid/gas interface (this makes sense for $z_0 \gg \xi$).

6/ Consider a liquid/gas interface where the density varies from n_l to n_g. The vapor-liquid interfacial energy is

$$\begin{aligned}\sigma = F_f[n_*] &= \sqrt{2g}\int_{n_g}^{n_l} \mathrm{d}n \sqrt{f(n)} = \sqrt{2gc}\int_{n_g}^{n_l} \mathrm{d}n\,(n_l - n)(n - n_g) \\ &= \sqrt{2gc}\int_0^{n_l - n_g} \mathrm{d}x\,(n_l - n_g - x)\,x = \sqrt{2\,g\,c}\,(n_l - n_g)^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{2\,g\,c}}{6}\,(n_l - n_g)^3\end{aligned} \tag{11}$$

7/ In the general case where $n_s \neq n_l$, the same manipulations give

$$F_f[n_*(z)] = \sqrt{2g}\int_{n_g}^{n_s} \mathrm{d}n\sqrt{f(n)} = \sqrt{2\,g\,c}\,(n_l - n_g)^3\left[\frac{1}{2}\left(\frac{n_s - n_g}{n_l - n_g}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{n_s - n_g}{n_l - n_g}\right)^3\right] \tag{12}$$

We set $\psi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n_l - n_s}{n_l - n_g}$. For $n_s \in [n_g, n_l]$ we have $\psi \in [0,1]$ ($\psi = 1$ for the vapor and $\psi = 0$ for the liquid). We write

$$\frac{n_s - n_g}{n_l - n_g} = 1 - \psi \tag{13}$$

hence

$$F_f[n_*] = \sigma\left[3(1-\psi)^2 - 2(1-\psi)^3\right] = \sigma\left(1 - 3\psi^2 + 2\psi^3\right)\,. \tag{14}$$

We can relate the surface order parameter ψ to the parameter δ

$$\delta = \frac{1}{\psi} - 1 \tag{15}$$

i.e. to the height of the interface

$$\frac{1}{\psi} = 1 + \mathrm{e}^{z_0/\xi} \tag{16}$$

When $\psi \to 0$, the height increases, we have $\psi \simeq \mathrm{e}^{-z_0/\xi}$.

8/ We write the surface contribution in terms of the new parameter

$$f_{\text{subs}}(n_s) = f_{\text{subs}}(n_l) - \left(a_1 + a_2\frac{n_l}{\Delta n}\right)\psi + \tfrac{1}{2}\,a_2\,\psi^2\,. \tag{17}$$

As a result, the total grand potential is

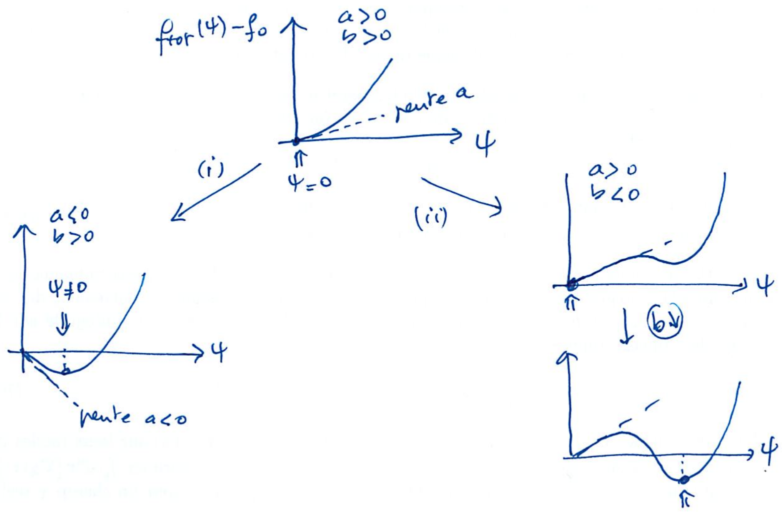
$$f_{\text{tot}}(\psi) = \underbrace{\sigma + f_{\text{subs}}(n_l)}_{=f_0} \underbrace{-\left(a_1 + a_2\frac{n_l}{\Delta n}\right)}_{=a}\psi + \underbrace{\left(\frac{1}{2}a_2 - 3\sigma\right)}_{=b}\psi^2 + 2\sigma\,\psi^3 \tag{18}$$

which has the form of a Landau expansion, in terms of the surface order parameter $\psi \in [0,1]$.

9/ L'expérience montre une transition du premier ordre (z_0 fait un saut de ~ 10 nm à $T_w \simeq 40$°C).

(i) si a change de signe avec $b > 0$, $f_{\text{tot}}(\psi)$ décrit une transition du 2nd ordre.

(ii) si b change de signe avec $a > 0$, $f_{\text{tot}}(\psi)$ décrit une transition du premier ordre $\Rightarrow$ cela correspond à l'expérience.



Commentaire : le calcul de $f_{\rm tot}(\psi)$ a montré que le changement de signe de $b = \frac{1}{2}a_2 - 3\sigma$ ne peut venir que de la contribution du terme de surface $f_{\rm subs}(n_s)$. La transition de mouillage étudiée ici est donc un exemple de **transition de surface** discutée au TD n°4.

Notons que la physique du mouillage est assez riche. Dans beaucoup de situations les forces de van der Waals entre molécules, de longue portée, jouent un rôle important. On peut observer des transitions du premier ou du second ordre selon les fluides. On pourra consulter par exemple la revue introductive :
J. O. Indekeu, *Introduction to wetting phenomena*, Acta Physica Polonica **B26**(6), 1065–1100 (1995). `http://th-www.if.uj.edu.pl/acta/vol26/pdf/v26p1065.pdf`
ou le petit article :
D. Bonn, *Wetting transitions*, Current Opinion in Colloid & Interface Science **6**, 22–27 (2001).

2 Mécanisme de Higgs-Anderson et effet Meissner

On considère un métal supraconducteur décrit par

$$F[\psi,\psi^*,\mathbf{A}] = \int_V \mathrm{d}^d\mathbf{r}\,\left[\frac{1}{2m}\,|(\nabla - \mathrm{i}\,\mathbf{A})\psi|^2 + U(|\psi|) + \frac{1}{2}\,(\nabla\times\mathbf{A})^2\right] \tag{19}$$

où $\psi(\mathbf{r})$ est le paramètre d'ordre du supraconducteur ($|\psi|^2$ est la densité de paires de Cooper) et $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ le potentiel vecteur. V est le volume.

1/ Le potentiel $U(|\psi|) = U_0 + 2\,a(T)\,|\psi|^2 + b\,|\psi|^4$, avec $a(T) = \tilde{a}\,(T-T_c)$ et $b>0$, est la fonction de Landau. Le minimum est obtenu pour $\frac{\partial U(|\psi|)}{\partial\psi^*} = 0$ soit $a(T)\,\psi + b\,|\psi|^2\,\psi = 0$.
(i) si $T>T_c$, alors $a>0$ et la solution est $\psi=0$ (état normal).
(ii) si $T<T_c$, alors $a<0$ et la solution stable est $|\psi| = \sqrt{-a/b}$. On a une liberté sur la phase, i.e. il y a un continuum de minima équivalents, différant par leur phase.

$$U(|\psi|) = U_0 + 2\,a\,|\psi|^2 + b\,|\psi|^4 = U_0 + b\,\left(|\psi|^4 + 2\frac{a}{b}\,|\psi|^2\right) = b\,(|\psi|^2 - n_s)^2 \tag{20}$$

si l'on choisit $U_0 = a^2/b = b\,n_s^2$. On a $n_s = -a/b$. Ce paramètre $n_s(T) = \frac{\tilde{a}}{b}(T_c - T)$ est le minimum du potentiel pour $|\psi|^2$ lorsque $T<T_c$, i.e. correspond à la densité de paires de Cooper dans l'état supra.

2/ Si l'on choisit $\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{n_s}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi(\mathbf{r})}$ (densité fixée), alors $U(|\psi|)=0$ et l'on a $\nabla\psi = \psi\,\mathrm{i}\nabla\chi$, d'où $F_s[\chi,\mathbf{A}] \equiv F[\psi,\psi^*,\mathbf{A}]\big|_{\psi=\sqrt{n_s}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi}}$ avec

$$F_s[\chi,\mathbf{A}] = \int_V \mathrm{d}^d\mathbf{r}\,\left[\frac{n_s}{2m}(\nabla\chi - \mathbf{A})^2 + \frac{1}{2}\,(\nabla\times\mathbf{A})^2\right] \tag{21}$$

C'est la fonctionnelle (simplifiée) décrivant l'état supra, loin de T_c.

3/ Décomposition de Fourier

$$\int_V \mathrm{d}^d\mathbf{r}\,\left[\nabla\chi(\mathbf{r})\right]^2 = \int_V \frac{\mathrm{d}^d\mathbf{r}}{V}\sum_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}\left(\mathrm{i}\mathbf{q}\,\tilde{\chi}_{\mathbf{q}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\right)\cdot\left(\mathrm{i}\mathbf{q}'\,\tilde{\chi}_{\mathbf{q}'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}'\cdot\mathbf{r}}\right)$$

$$= -\sum_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}'\,\tilde{\chi}_{\mathbf{q}}\,\tilde{\chi}_{\mathbf{q}'}\underbrace{\int_V \frac{\mathrm{d}^d\mathbf{r}}{V}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{q}+\mathbf{q}')\cdot\mathbf{r}}}_{=\delta_{\mathbf{q},-\mathbf{q}'}} = \sum_{\mathbf{q}}\mathbf{q}^2\,\tilde{\chi}_{\mathbf{q}}\tilde{\chi}_{-\mathbf{q}} = \sum_{\mathbf{q}}\mathbf{q}^2\,|\tilde{\chi}_{\mathbf{q}}|^2 \tag{22}$$

même chose pour le potentiel vecteur

$$\int_V \mathrm{d}^d\mathbf{r}\,\left[\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r})\right]^2 = \sum_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}\times\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}})\cdot(\mathbf{q}\times\widetilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{q}}) \tag{23}$$

D'où

$$F_s[\chi,\mathbf{A}] \tag{24}$$
$$= \sum_{\mathbf{q}}\left\{\frac{n_s}{2m}\left[\mathbf{q}^2\,\tilde{\chi}_{\mathbf{q}}\tilde{\chi}^*_{\mathbf{q}} - \tilde{\chi}_{\mathbf{q}}\,\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}^*_{\mathbf{q}} + \tilde{\chi}^*_{\mathbf{q}}\,\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}} + \widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}^*_{\mathbf{q}}\right] + \frac{1}{2}(\mathbf{q}\times\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}})\cdot(\mathbf{q}\times\widetilde{\mathbf{A}}^*_{\mathbf{q}})\right\}$$

4/ On combine : $az^*z - b^*z - bz^* = a|z-b/a|^2 - |b|^2/a$, d'où

$$\int \mathrm{d}z\mathrm{d}z^*\,\mathrm{e}^{-az^*z+b^*z+bz^*} = \mathrm{e}^{|b|^2/a}\int \mathrm{d}z\mathrm{d}z^*\,\mathrm{e}^{-a|z-b/a|^2} = \mathrm{e}^{|b|^2/a}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\mathrm{e}^{-a(x-x_0)^2-a(y-y_0)^2} = \frac{\pi}{a}\,\mathrm{e}^{|b|^2/a}$$

5/ La fonctionnelle est de la forme $F_s[\chi,\mathbf{A}] = \sum_{\mathbf{q}} f(\tilde{\chi}_{\mathbf{q}},\tilde{\chi}^*_{\mathbf{q}},\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}},\widetilde{\mathbf{A}}^*_{\mathbf{q}})$. L'intégrale fonctionnelle gaussienne sur χ peut être calculée grâce à la décomposition sur les modes :

$$\int \mathcal{D}\chi\,\mathrm{e}^{-\beta F_s[\chi,\mathbf{A}]} \equiv \int\left(\prod_{\mathbf{q}>0}\mathrm{d}\tilde{\chi}_{\mathbf{q}}\mathrm{d}\tilde{\chi}^*_{\mathbf{q}}\,\mathrm{e}^{-\beta f(\tilde{\chi}_{\mathbf{q}},\tilde{\chi}^*_{\mathbf{q}},\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}},\widetilde{\mathbf{A}}^*_{\mathbf{q}})}\right) \tag{25}$$

J'ai introduit la notation "$\prod_{\mathbf{q}>0}$" pour rappeler que $\mathbf{q}$ et $-\mathbf{q}$ correspondent à un même couple $(\tilde{\chi}_{\mathbf{q}},\tilde{\chi}^*_{\mathbf{q}})$.
On peut donc utiliser l'intégrale de la question précédente pour intégrer sur chaque mode, avec $z\to\tilde{\chi}_{\mathbf{q}}$, $a\to\frac{\beta n_s}{2m}\mathbf{q}^2$ et $b\to\frac{\beta n_s}{2m}\left(-\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}}\right)$ d'où

$$\int \mathrm{d}\tilde{\chi}_{\mathbf{q}}\mathrm{d}\tilde{\chi}^*_{\mathbf{q}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\beta n_s}{2m}\left[\mathbf{q}^2\,\tilde{\chi}_{\mathbf{q}}\tilde{\chi}^*_{\mathbf{q}}+\tilde{\chi}_{\mathbf{q}}\,(\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}})^*+\tilde{\chi}^*_{\mathbf{q}}\,(\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}})\right]} = \frac{2\pi m}{\beta n_s\mathbf{q}^2}\,\mathrm{e}^{+\frac{\beta n_s}{2m\mathbf{q}^2}(\mathbf{q}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}})(\mathbf{q}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}^*_{\mathbf{q}})} \tag{26}$$

En regroupant toutes les intégrales on obtient

$$\int \mathcal{D}\chi\,\mathrm{e}^{-\beta F_s[\chi,\mathbf{A}]} \equiv \int\left(\prod_{\mathbf{q}>0}\mathrm{d}\tilde{\chi}_{\mathbf{q}}\mathrm{d}\tilde{\chi}^*_{\mathbf{q}}\right)\,\mathrm{e}^{-\beta F_s[\chi,\mathbf{A}]} \tag{27}$$
$$= C_s\prod_{\mathbf{q}>0}\exp\left\{-\frac{\beta n_s}{2m}\left[\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{q}} - \frac{(\mathbf{q}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}})(\mathbf{q}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{q}})}{\mathbf{q}^2}\right] - \frac{\beta}{2}(\mathbf{q}\times\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}})\cdot(\mathbf{q}\times\widetilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{q}})\right\}$$

où

$$C_s = \frac{1}{\prod_{\mathbf{q}>0}(\frac{\beta n_s\mathbf{q}^2}{2\pi m})} = \frac{1}{\sqrt{\det(-\frac{\beta n_s}{2\pi m}\Delta)}} \tag{28}$$

s'interprète comme le déterminant du Laplacien (dont les v.p. sont $-\mathbf{q}^2$). La racine tient compte de ce que $\mathbf{q}$ et $-\mathbf{q}$ correspondent à la même v.p. dégénérée (mais $\prod_{\mathbf{q}>0}$ ne tient compte que d'un vecteur). On a donc obtenu

$$Z_s = C_s \int \mathcal{D}\mathbf{A}\, \mathrm{e}^{-\beta\mathscr{F}[\mathbf{A}]} \tag{29}$$

avec

$$\mathscr{F}[\mathbf{A}] = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}} \left\{ \frac{n_s}{m}\left[\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}} \cdot \widetilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{q}} - \frac{(\mathbf{q}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}})(\mathbf{q}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{q}})}{\mathbf{q}^2} \right] + (\mathbf{q}\times\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}})\cdot(\mathbf{q}\times\widetilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{q}}) \right\} \tag{30}$$

C_s est donc la fonction de partition en l'absence du potentiel vecteur, i.e. la fonction de partition du supra à $\mathbf{A}=0$.

6/ $\widetilde{\mathbf{A}}^{\parallel}_{\mathbf{q}} = (\mathbf{q}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}})\,\mathbf{q}/\mathbf{q}^2$ est la composante parallèle au vecteur $\mathbf{q}$. On écrit $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}} = \widetilde{\mathbf{A}}^{\parallel}_{\mathbf{q}} + \widetilde{\mathbf{A}}^{\perp}_{\mathbf{q}}$. Comme les deux composantes sont orthogonales

$$\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{q}} = \widetilde{\mathbf{A}}^{\parallel}_{\mathbf{q}}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}^{\parallel}_{-\mathbf{q}} + \widetilde{\mathbf{A}}^{\perp}_{\mathbf{q}}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}^{\perp}_{-\mathbf{q}} \tag{31}$$

7/ On a aussi$||\mathbf{q}\times\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}}|| = ||\mathbf{q}||\,||\widetilde{\mathbf{A}}^{\perp}_{\mathbf{q}}||$, d'où

$$\mathscr{F}[\mathbf{A}] = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}}\left(\frac{n_s}{m}+\mathbf{q}^2\right)\widetilde{\mathbf{A}}^{\perp}_{\mathbf{q}}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}^{\perp}_{-\mathbf{q}} \tag{32}$$

On identifie la longueur de London

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m}{n_s}} \tag{33}$$

qui est une longueur de corrélation pour le potentiel vecteur.

Un *changement de jauge* $\mathbf{A}\to\mathbf{A}+\nabla\phi$ prend la forme $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}}\to\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}}+\mathrm{i}\mathbf{q}\,\widetilde{\phi}_{\mathbf{q}}$, ce qui n'affecte que $\widetilde{\mathbf{A}}^{\parallel}_{\mathbf{q}}$ et laisse $\widetilde{\mathbf{A}}^{\perp}_{\mathbf{q}}$ invariant, et donc $\mathscr{F}[\mathbf{A}+\nabla\phi]=\mathscr{F}[\mathbf{A}]$. La théorie est bien invariante de jauge, comme il se doit.

8/ On revient à l'espace réel : on a vu plus haut que $\sum_{\mathbf{q}}\mathbf{q}^2\widetilde{\mathbf{A}}^{\perp}_{\mathbf{q}}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}^{\perp}_{-\mathbf{q}} = \int_V \mathrm{d}^d\mathbf{r}\,\left(\nabla\mathbf{A}^{\perp}\right)^2$, d'où

$$\boxed{\mathscr{F}[\mathbf{A}] = \frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}^d\mathbf{r}\,\left\{\left(\nabla\mathbf{A}^{\perp}\right)^2 + \lambda_L^{-2}\left(\mathbf{A}^{\perp}\right)^2\right\}} \tag{34}$$

L'équation pour le champ est donc

$$\left(-\Delta+\lambda_L^{-2}\right)\mathbf{A}^{\perp} = 0\,. \tag{35}$$

Remarque : finalement, nous avons obtenu l'identité

$$\int \mathcal{D}\chi\,\mathrm{e}^{-\frac{\beta n_s}{2m}\int_V \mathrm{d}^d\mathbf{r}\,(\nabla\chi-\mathbf{A})^2} = \frac{1}{\sqrt{\det(-\frac{\beta n_s}{2\pi m}\Delta)}}\mathrm{e}^{-\frac{\beta n_s}{2m}\int_V \mathrm{d}^d\mathbf{r}\,(\mathbf{A}^{\perp})^2} \tag{36}$$

$\mathbf{A}\to\mathbf{A}-\nabla\chi$ est une transformation de jauge, ce qui donne un sens clair à cette intégrale fonctionnelle, correspondant à une intégration sur tous les choix de jauge. Le résultat est le terme invariant de jauge.

9/ Effet Meissner.— L'équation précédente a pour solution des fonctions décroissant exponentiellement vite. Par exemple, dans une situation invariante par translation dans deux directions, on trouverait

$$\mathbf{A}^{\perp}(x,y,z) = \mathbf{A}_0\,\mathrm{e}^{-x/\lambda_L} \tag{37}$$

La longueur de London est la longueur de pénétration du champ magnétique dans le supra (c'est une longueur d'écrantage du champ magnétique).

L'interprétation est donc que le couplage du potentiel vecteur au champ de supra génère un terme $\lambda_L^{-2}\,(\mathbf{A}^{\perp})^2$ lorsque le champ de la supra est non nul en moyenne $|\psi| = \sqrt{n_s}$. Non massif dans le vide, on dit que le photon acquiert une masse dans le supra, ce qui empêche sa propagation sur des distances plus grande que λ_L (dans (34), $m_\gamma = \lambda_L^{-2}$ s'interprète comme une masse).

C'est le même mécanisme qui explique la masse des particules dans le *modèle standard* en physique des particules : au cœur du modèle on introduit des champs fermioniques non massifs (les champs des leptons, etc). On postule l'existence d'un champ scalaire complexe, le Higgs, couplé aux champs fermioniques. Si le champ de Higgs est non nul en moyenne sous une certaine température, cela produit un terme de masse pour les fermions.

Remarque : En calculant les intégrales fonctionnelles gaussiennes, nous avons glissé sous le tapis une difficulté technique liée à l'invariance de jauge :

$$Z_s = \int \mathcal{D}\mathbf{A}\mathcal{D}\chi\, \mathrm{e}^{-\beta F_s[\chi,\mathbf{A}]} = C_s \int \mathcal{D}\mathbf{A}\, \mathrm{e}^{-\beta \mathscr{F}[\mathbf{A}]} \tag{38}$$

Nous venons de voir que $\mathscr{F}[\mathbf{A}]$ ne dépend que de $\mathbf{A}^{\perp}$ et pas de $\mathbf{A}^{\parallel}$. L'intégrale est donc de la forme $\int \mathcal{D}\mathbf{A}\, \mathrm{e}^{-\beta\mathscr{F}[\mathbf{A}^{\perp}]} = \int \mathcal{D}\mathbf{A}^{\parallel}\mathcal{D}\mathbf{A}^{\perp}\, \mathrm{e}^{-\beta\mathscr{F}[\mathbf{A}^{\perp}]}$, ce qui montre que l'intégrale fonctionnelle sur les composantes parallèles est divergente ! C'est un point standard dans les théories de jauge, qui nécessite un traitement particulier que nous n'avons bien entendu pas évoqué ici ! Sur ce dernier point, on pourra consulter :
L. Ryder, *Quantum field theory*, Cambridge University Press, 1985.