M1 Magistère de physique fondamentale – ENS PSay,

Option Transitions de phase – Examen

19 janvier 2024

Durée : 3h

L'utilisation de documents, calculatrices, téléphones portables,... est interdite.

Recommandations :

Lisez attentivement l'énoncé et rédigez *succinctement* et *clairement* votre réponse.
n'oubliez pas de vous **relire**.

1 Transition de mouillage

On considère un fluide sur un substrat. Pour simplifier, la configuration est invariante par translation selon les directions x et y. Le plan du substrat est $z = 0$. On note $n(z)$ la densité du fluide, qui peut varier entre n_g (densité de la phase gazeuse) et n_l (phase liquide). L'interaction entre le substrat et le fluide est soit attractive, ce qui favorise le contact avec la phase liquide, soit répulsive. On commence par étudier le fluide en volume, en supposant que la densité du fluide est fixée à la surface, $\boldsymbol{n(0) = n_s}$ avec $n_g \leqslant n_s \leqslant n_l$. Le grand potentiel du fluide (par unité de surface) est décrit par une fonctionnelle de Landau-Ginzburg de la forme

$$F_f[n(z)] = \int_0^\infty \mathrm{d}z \left\{ \frac{g}{2} \left[\partial_z n(z)\right]^2 + f(n(z)) \right\} \tag{1}$$

où $f(n)$ est une fonction de Landau qui sera définie plus tard.

1/ Donner l'équation du champ minimisant $F_f[n(z)]$ (sans prendre en compte de termes de bord). On note $n_*(z)$ la solution.

2/ Que peut-on dire de $\frac{g}{2} \left[\partial_z n_*(z)\right]^2 - f(n_*(z))$?

3/ On choisira $f(n)$ de telle sorte que $f(n_g) = 0$. Sachant que $n_*(z \to \infty) = n_g$, montrer que

$$F_f[n_*(z)] = \int_{n_g}^{n_s} \mathrm{d}n \sqrt{2g\, f(n)} \tag{2}$$

4/ Par la suite on choisit $f(n) = c\,(n - n_g)^2 (n - n_l)^2$. Montrer que la solution est donnée par

$$n_*(z) = \frac{n_g + n_l\, \delta\, \mathrm{e}^{-z/\xi}}{1 + \delta\, \mathrm{e}^{-z/\xi}} \qquad \text{où } \delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n_s - n_g}{n_l - n_s} \tag{3}$$

Donner l'expression de ξ et interpréter cette longueur.

Hint : $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \int \mathrm{d}x \left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right]$.

5/ On pose $z_0 = \xi \ln \delta$. Donner la nouvelle expression de $n_*(z)$ (où δ a disparu au profit de z_0). Tracer soigneusement la solution (supposer $n_l \gg n_g$ et se placer dans une situation où $z_0 > 0$ et $z_0 \gg \xi$). Comment peut-on interpréter z_0 ?

6/ On introduit l'énergie de l'interface liquide/gaz (en l'absence du substrat, ou alors en supposant que $n_*(0) = n_l$) $\sigma = \int_{n_g}^{n_l} \mathrm{d}n \sqrt{2g\, f(n)}$. Calculer explicitement l'intégrale.

7/ Si l'on tient compte de la présence du substrat, la densité au bord est donc $n_*(0) = n_s \neq n_l$ et l'énergie du fluide est donnée par (2). Montrer que

$$F_f[n_*] = \sigma \left(1 - 3\psi^2 + 2\psi^3\right) \qquad \text{où } \psi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n_l - n_s}{n_l - n_g} \tag{4}$$

Si $n_s \in [n_g, n_l]$, quel est le domaine de variation de ψ ? Quelles valeurs correspondent aux phases liquide et gazeuse ? Exprimer le paramètre δ en fonction de ψ et déduire une relation entre z_0 et ψ. Comment varie z_0 lorsque n_s va de n_g à n_l ?

8/ L'interaction entre le fluide et le substrat apporte une autre contribution de la forme

$$f_{\mathrm{subs}}(n_s) \simeq a_0 + a_1 \frac{n_s}{\Delta n} + \frac{1}{2} a_2 \left(\frac{n_s}{\Delta n}\right)^2 \qquad \text{où } \Delta n \stackrel{\mathrm{def}}{=} n_l - n_g \,. \tag{5}$$

Supposons que $a_2 = 0$, pour simplifier : $a_1 > 0$ décrit-il une interaction attractive entre le fluide et le substrat (contact avec le liquide favorable) ou l'inverse ? Pour $a_1 \neq 0$ et $a_2 \neq 0$, montrer que $f_{\mathrm{subs}}(n_s) = f_{\mathrm{subs}}(n_l) + \tilde{a}_1 \psi + \frac{1}{2}\tilde{a}_2 \psi^2$ et déduire l'expression de

$$f_{\mathrm{tot}}(\psi) = f_{\mathrm{subs}}(n_s) + F_f[n_*(z)] \tag{6}$$

en fonction de ψ.

9/ **Transition de mouillage.–** Lorsque $n_s \simeq n_l$, il y a mouillage. Au contraire, si $n_s \ll n_l$ le liquide ne mouille pas la surface.
L'expression finale du grand potentiel obtenue plus haut est de la forme

$$f_{\mathrm{tot}}(\psi) = f_0 + a\,\psi + b\,\psi^2 + 2\sigma\,\psi^3 \tag{7}$$

Les deux coefficients a et b peuvent changer de signe (ils dépendent de n_g, n_l, de la température,...).

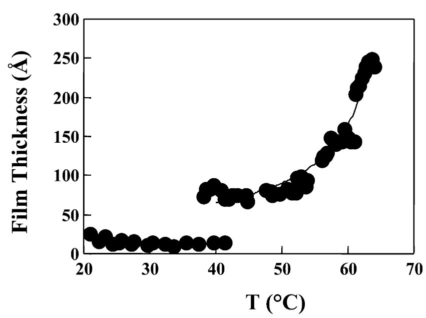

FIGURE 1 : *Épaisseur d'un film d'hexane (le fluide) sur de l'eau salée (jouant le rôle du substrat) à différentes températures.* Tirée de Shahidzadeh *et al.*, Phys. Rev. Lett. **80**, 3992 (1998).

La figure 1 montre l'évolution de l'épaisseur d'un film d'hexane sur un autre fluide (le "substrat"). Quel est l'ordre de la transition ? À quel scénario cela correspond-t-il ?

Pour justifier votre réponse, on discutera la nature de la transition décrite par $f_{\mathrm{tot}}(\psi)$: (i) si a change de signe avec $b > 0$; (ii) ou si b change de signe avec $a > 0$. Faire des schémas pour illustrer chaque situation et appuyer votre réponse.

2 Mécanisme de Higgs-Anderson et effet Meissner

On considère un métal supraconducteur décrit par la fonctionnelle de Ginzburg-Landau

$$F[\psi, \psi^*, \mathbf{A}] = \int_V \mathrm{d}^d\mathbf{r}\, \left[\frac{1}{2m}\left|(\nabla - \mathrm{i}\,\mathbf{A})\psi\right|^2 + U(|\psi|) + \frac{1}{2}\left(\nabla \times \mathbf{A}\right)^2\right] \tag{8}$$

où $\psi(\mathbf{r})$ est le paramètre d'ordre du supraconducteur, un champ scalaire complexe décrivant le condensat de paires de Cooper ($|\psi|^2$ est la densité de paires). $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ est le potentiel vecteur. V est le volume. Pour simplifier, on a fixé $\hbar = 1$, $q = 1$ (la charge électrique) et $\mu_0 = 1$ (la permittivité diélectrique du vide).

1/ On choisit $U(|\psi|) = U_0 + 2\,a(T)\,|\psi|^2 + b\,|\psi|^4$ où $a(T) = \tilde{a}\,(T - T_c)$ et $b > 0$. Dans un premier temps on suppose que le champ ψ est uniforme et que $\mathbf{A} = 0$. Décrire qualitativement l'évolution du champ ψ avec la température T. S'il y a une transition, préciser l'ordre. Montrer que pour $T < T_c$, en ajustant U_0, on peut mettre le potentiel sous la forme $U(|\psi|) = b\,(|\psi|^2 - n_s)^2$. Quel est le sens physique de n_s ? Exprimer n_s en fonction de T.

Dans la suite du problème on considère que la température est sous T_c et suffisamment loin, pour que l'on puisse négliger les fluctuations de densité et considérer $|\psi| = \sqrt{n_s}$ fixé. ψ est seulement contrôlé par sa phase $\chi \in \mathbb{R}$:

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{n_s}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi(\mathbf{r})} \tag{9}$$

2/ En injectant (9) dans (8), donner la nouvelle fonctionnelle $F_s[\chi, \mathbf{A}] \equiv F[\psi, \psi^*, \mathbf{A}]\big|_{\psi=\sqrt{n_s}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi}}$ décrivant l'état supra, dépendant du champ de phase.

L'objectif du problème est de trouver la fonctionnelle *effective* pour le champ électromagnétique seul, une fois "intégré" sur le champ de phase (le "mode de Goldstone"). Autrement dit, on cherche à exprimer la fonction de partition du supraconducteur comme une intégrale sur le champ électromagnétique seul :

$$Z_s = \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\mathbf{A}\,\mathrm{e}^{-\beta F_s[\chi,\mathbf{A}]} = \int \mathcal{D}\mathbf{A}\,\mathrm{e}^{-\beta \mathscr{F}[\mathbf{A}]}\,. \tag{10}$$

3/ On décompose les deux champs $\chi(\mathbf{r})$ (scalaire réel) et $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (vectoriel) sur leurs modes de Fourier $\tilde{\chi}_{\mathbf{q}}$ et $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}}$ (CF. CONVENTION DANS L'ANNEXE). Exprimer $\int_V \mathrm{d}^d\mathbf{r}\,\left[\nabla\chi(\mathbf{r})\right]^2$ comme une somme sur les modes de Fourier (noter que $\tilde{\chi}^*_{\mathbf{q}} = \tilde{\chi}_{-\mathbf{q}}$ pour un champ χ réel). Même question pour le terme $\int_V \mathrm{d}^d\mathbf{r}\,\left[\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r})\right]^2$.

Déduire une expression de $F_s[\chi, \mathbf{A}]$ en fonction des transformées de Fourier $\tilde{\chi}_{\mathbf{q}}$ et $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}}$.

4/ Parenthèse.— On considère une intégrale gaussienne dans le plan $\mathbb{R}^2$, avec des notations complexes. Soit $z = x + \mathrm{i}\,y \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $a > 0$, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}z\mathrm{d}z^*\,\mathrm{e}^{-az^*z + b^*z + bz^*} = \frac{\pi}{a}\,\mathrm{e}^{|b|^2/a}\,, \qquad \text{où la notation est } \mathrm{d}z\mathrm{d}z^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,. \tag{11}$$

5/ Puisque les composantes de Fourier des champs sont découplées (i.e. $\mathrm{e}^{-\beta F_s}$ se factorise comme un produit $\prod_{\mathbf{q}}$), on peut intégrer sur chaque mode séparément. Montrer que

$$\int \mathcal{D}\chi\,\mathrm{e}^{-\beta F_s[\chi,\mathbf{A}]} \equiv \int \left(\prod_{\mathbf{q}} \mathrm{d}\tilde{\chi}_{\mathbf{q}}\mathrm{d}\tilde{\chi}^*_{\mathbf{q}}\right)\,\mathrm{e}^{-\beta F_s[\chi,\mathbf{A}]} \tag{12}$$

$$= C_s \prod_{\mathbf{q}} \exp\left\{-\frac{\beta n_s}{2m}\left[\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{q}} - \frac{(\mathbf{q}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}})(\mathbf{q}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{q}})}{\mathbf{q}^2}\right] - \frac{\beta}{2}(\mathbf{q}\times\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}})\cdot(\mathbf{q}\times\widetilde{\mathbf{A}}_{-\mathbf{q}})\right\}$$

où $\int \mathrm{d}\tilde{\chi}_{\mathbf{q}}\mathrm{d}\tilde{\chi}^*_{\mathbf{q}}$ désigne l'intégration dans le plan complexe de $\tilde{\chi}_{\mathbf{q}}$ (remplaçant le z de la question **4**/). Pouvez-vous interpréter la constante C_s (mathématiquement *et* physiquement) ?

6/ On note $\widetilde{\mathbf{A}}^{\parallel}_{\mathbf{q}} = (\mathbf{q}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}})\,\mathbf{q}/\mathbf{q}^2$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^{\perp}_{\mathbf{q}} = \widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}} - \widetilde{\mathbf{A}}^{\parallel}_{\mathbf{q}}$ les composantes du champ respectivement parallèle et perpendiculaire à $\mathbf{q}$. Exprimer $\widetilde{\mathbf{A}}^{\perp}_{\mathbf{q}}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}^{\perp}_{-\mathbf{q}}$ en fonction de $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}}$ et $\mathbf{q}$. Déduire que

$$Z_s = C_s \int \mathcal{D}\mathbf{A}\,\mathrm{e}^{-\beta\mathscr{F}[\mathbf{A}]} \quad \text{où} \quad \mathscr{F}[\mathbf{A}] = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}}\left(\mathbf{q}^2 + \lambda_L^{-2}\right)\widetilde{\mathbf{A}}^{\perp}_{\mathbf{q}}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}^{\perp}_{-\mathbf{q}} \tag{13}$$

Exprimer λ_L en fonction de m et n_s. Discuter sa dépendance en T. Comment la fonctionnelle $\mathscr{F}[\mathbf{A}]$ est-elle affectée par une transformation de jauge ($\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla\phi$ où ϕ est un champ scalaire) ?

7/ Dans cette question on oublie la nature vectorielle du champ $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}}^{\perp} \to \widetilde{A}_{\mathbf{q}}$ et l'on considère l'action simplifiée $\mathscr{F}[A] = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}}\left(\mathbf{q}^2 + \lambda_L^{-2}\right)\widetilde{A}_{\mathbf{q}}\widetilde{A}_{-\mathbf{q}}$. Exprimer l'action comme une intégrale dans l'espace réel pour le champ $A(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{q}}\widetilde{A}_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$. Déduire l'équation du champ $\delta\mathscr{F}[A]/\delta A(\mathbf{r}) = 0$.

8/ **Effet Meissner.—** À une interface du métal supra, certaines conditions aux limites sont imposées. Par exemple on peut considérer la situation où le supra est dans la région $x > 0$ et l'on impose $A(x = 0, y, z) = A_0 > 0$. Discuter le comportement du champ dans le supra.

Annexe

Transformation de Fourier.— En volume V fini, la convention pour la TF est

$$\tilde{\chi}_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{V}}\int_V \mathrm{d}\mathbf{r}\,\chi(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \quad \text{et} \quad \chi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{q}}\tilde{\chi}_{\mathbf{q}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \tag{14}$$

(en volume fini, les modes, donc les $\mathbf{q}$ sont discrets). Les relations sont analogues pour le champ vectoriel $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ et sa TF $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}}$. Il sera utile d'utiliser

$$\int_V \mathrm{d}^d\mathbf{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = V\,\delta_{\mathbf{q},0}\,. \tag{15}$$

Solutions disponibles à `http://lptms.u-psud.fr/christophe_texier/`