

Examen "Transitions de phase", 17/01/2025 – CORRECTION

1 Ising avec interaction ferromagnétique de portée finie

On s'intéresse à un modèle d'Ising

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{\vec{r}, \vec{r}'} J(\vec{r} - \vec{r}') s(\vec{r}) s(\vec{r}') - \sum_{\vec{r}} B(\vec{r}) s(\vec{r}) \quad (1)$$

où les spins $s(\vec{r}) = \pm 1$ sont placés sur un réseau hypercubique. L'interaction ferromagnétique $J(\vec{r} - \vec{r}') > 0$ décroît avec la distance $J(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$.

Le pas du réseau est $a = 1$, i.e. $\sum_{\vec{r}} \approx \int d^d \vec{r}$. On utilisera soit la somme discrète soit l'intégrale.

1/ *Préliminaire (spin paramagnétique)* : Pour l'hamiltonien $H_0(s) = -B s$ avec $s = \pm 1$, on obtient $Z = 2 \cosh(\beta B)$ et $F = -(1/\beta) \ln[2 \cosh(\beta B)]$. Donc

$$M = \langle s \rangle = -\frac{\partial F}{\partial B} = \tanh(\beta B) \quad (2)$$

2/ Si $B = 0$, dans l'état fondamental de (1) tous les spins sont alignés (tous les spins sont $s(\vec{r}) = +1$ ou tous $s(\vec{r}) = -1$). C'est la phase ferromagnétique, i.e. la phase ordonnée, dominée par l'énergie. Si $T \rightarrow \infty$ les fluctuations thermiques dominent toute forme d'énergie et les spins alternent $s(\vec{r}) = \pm 1$: phase paramagnétique, i.e. la phase désordonnée, dominée par l'entropie.

3/ Le champ local est

$$B^{\text{loc}}(\vec{r}) = -\frac{\delta H}{\delta s(\vec{r})} = B(\vec{r}) + \sum_{\vec{r}'} J(\vec{r} - \vec{r}') s(\vec{r}') \quad (3)$$

C'est le champ "vu" par le spin $s(\vec{r})$. Dans l'approximation du champ moyen, on fait $B \rightarrow \langle B^{\text{loc}} \rangle$ dans (2). Si $M(\vec{r}) = \langle s(\vec{r}) \rangle$, le champ local moyen est $\langle B^{\text{loc}}(\vec{r}) \rangle = B(\vec{r}) + \sum_{\vec{r}'} J(\vec{r} - \vec{r}') M(\vec{r}')$, d'où

$$M(\vec{r}) = \tanh \left(\beta B(\vec{r}) + \beta \sum_{\vec{r}'} J(\vec{r} - \vec{r}') M(\vec{r}') \right) \quad (4)$$

qui est l'équation auto-cohérente pour $M(\vec{r})$. Elle est non-locale, donc un peu difficile à résoudre...

4/ On suppose qu'il existe une transition para-ferro à la température finie T_c . Si $T > T_c$, l'aimantation est nulle à $B(\vec{r}) = 0$. Si le champ est petit, on attend une aimantation faible, ce qui autorise de linéariser l'équation autocohérente :

$$M(\vec{r}) \simeq \beta \sum_{\vec{r}'} J(\vec{r} - \vec{r}') M(\vec{r}') + \beta B(\vec{r}) \quad \text{pour } B(\vec{r}) \rightarrow 0. \quad (5)$$

5/ Si on remplace la somme par une intégrale dans cette dernière équation, on a une convolution, qui devient après TF :

$$\widetilde{M}_{\vec{k}} \simeq \beta \widetilde{J}_{\vec{k}} \widetilde{M}_{\vec{k}} + \beta \widetilde{B}_{\vec{k}} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{M}_{\vec{k}} \simeq \frac{\beta \widetilde{B}_{\vec{k}}}{1 - \beta \widetilde{J}_{\vec{k}}} \quad (6)$$

L'interaction est $\widetilde{J}_{\vec{k}} = \int d^d \vec{r} J(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} = \int d^d \vec{r} J(\vec{r}) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r})$ en ayant utilisé $J(-\vec{r}) = J(\vec{r})$.

Cette dernière équation donne donc la "réponse" de l'aimantation à l'introduction du champ, i.e. permet d'identifier la TF de la fonction de réponse, définie par $\widetilde{M}_{\vec{k}} \simeq \widetilde{\chi}_{\vec{k}} \widetilde{B}_{\vec{k}}$ en TF, d'où $\widetilde{\chi}_{\vec{k}} = \beta / (1 - \beta \widetilde{J}_{\vec{k}})$ i.e.

$$\boxed{\widetilde{\chi}_{\vec{k}} = \frac{1}{k_B T - \widetilde{J}_{\vec{k}}}} \quad (7)$$

Remarque : cette relation nous rappelle la formule de Curie-Weiss $\chi(T) = 1/[k_B(T - T_c)]$ (pour $T > T_c$), que l'on peut obtenir dans le cadre de l'approximation de champ moyen pour le modèle d'Ising avec interactions entre plus proche voisins (dans ce cas $k_B T_c = qJ$ où $q = 2d$ est le nombre de voisins) [5]. L'éq. (7) est donc une généralisation, au cas d'une interaction arbitraire (pas nécessairement plus proches voisins), mais aussi contenant l'information sur la structure spatiale de la réponse. La susceptibilité "globale" (caractérisant la réponse à un champ homogène) est $\chi = \widetilde{\chi}_{\vec{k}=0} = \frac{1}{k_B T - \widetilde{J}_0}$, où $k_B T_c = \widetilde{J}_0 = \sum_{\vec{r}} J(\vec{r})$ (on retrouve bien $k_B T_c = qJ$ si un spin interagit seulement avec ses q plus proches voisins).

- 6/ La fonction de réponse $\chi(\vec{r})$ et la fonction de corrélation $C(\vec{r})$ sont reliées par la relation "fluctuation-dissipation" (ou "fluctuation-réponse") $C(\vec{r}) = k_B T \chi(\vec{r})$ (les fluctuations croissent $\propto k_B T$). D'où $\widetilde{C}_{\vec{k}} = (1 - \beta \widetilde{J}_{\vec{k}})^{-1}$. Prenant la TF inverse :

$$C(\vec{r}) = \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{1 - \beta \widetilde{J}_{\vec{k}}}. \quad (8)$$

- 7/ a) D'après $\widetilde{J}_{\vec{k}} = \int d^d \vec{r} J(\vec{r}) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r})$, un développement de la forme $\widetilde{J}_{\vec{k}} \simeq J [1 - (Rk)^2]$ pour $\vec{k} \rightarrow 0$ vient d'un développement du cos :

$$\widetilde{J}_{\vec{k}} \simeq \int d^d \vec{r} J(\vec{r}) \left[1 - \frac{1}{2} (\vec{k} \cdot \vec{r})^2 \right] \quad (9)$$

Ce développement existe si les intégrales sont convergentes, ce qui requiert que l'intégrale $\int d^d \vec{r} J(\vec{r}) (\vec{k} \cdot \vec{r})^2 \sim k^2 \int_0^\infty dr r^{d-1} J(\vec{r}) r^2$ converge. Si $J(\vec{r}) \sim r^{-\theta}$, l'intégrale $\int_0^\infty dr r^{d+1-\theta} < \infty$ à condition que $\theta > d+2$. On a alors $J = \int d^d \vec{r} J(\vec{r})$ et $JR^2 = \frac{1}{2d} \int d^d \vec{r} J(\vec{r}) \vec{r}^2$ (en faisant une hypothèse d'isotropie $\int d^d \vec{r} J(\vec{r}) r_i r_j \propto \delta_{ij}$). Finalement

$$R^2 = \frac{\int d^d \vec{r} J(\vec{r}) \vec{r}^2}{2d \int d^d \vec{r} J(\vec{r})} \quad (10)$$

Clairement, R mesure la portée de l'interaction. La condition

$$J(\vec{r}) \sim r^{-\theta} \quad \text{pour } \theta > d+2$$

correspond à une interaction de "courte portée" (ou au moins de "portée finie").

Pour analyser $C(\vec{r})$ à grande distance, on peut introduire ce développement de $\widetilde{J}_{\vec{k}}$ dans l'intégrale :

$$C(\vec{r}) \simeq \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{1 - \beta J [1 - (kR)^2]} \quad (11)$$

Le pôle de l'intégrande correspond à $T = T_c$, d'où $1 - \beta J = 1 - T_c/T$ avec $J = k_B T_c$.

b) On introduit l'écart à la température critique $t \stackrel{\text{def}}{=} (T - T_c)/T_c$. La fraction dans l'intégrale est

$$\frac{1}{1 - \beta J [1 - (kR)^2]} = \frac{T/T_c}{t + k^2 R^2} = \frac{T/T_c}{R^2} \frac{1}{1/\xi^2 + k^2} \quad \text{où } \boxed{\xi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R}{\sqrt{t}}} \quad (12)$$

s'identifie avec la longueur de corrélation (cf. cours). On a retrouvé l'exposant critique de la longueur de corrélation $\xi(t) = R t^{-\nu}$ avec $\nu = 1/2$ (champ moyen). On a étudié l'intégrale en cours, on a vu que

$$C(\vec{r}) \simeq \frac{T/T_c}{R^2} \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{1/\xi^2 + k^2} \sim e^{-r/\xi} \quad \text{pour } r \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Exemple, en $d = 1$, l'intégrale est la TF de la Lorentzienne $\int \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{1/\xi^2 + k^2} = (\xi/2)e^{-|r|/\xi}$

8/ On considère maintenant une interaction qui décroît comme $J(\vec{r}) \sim r^{-d-\alpha}$ avec $\alpha \in]0, 2[$. La condition d'interaction de "courte portée" n'est plus valable, la définition (10) donne $R = \infty$, ce qui affecte le développement de $\tilde{J}_{\vec{k}}$.

a) Écrivons

$$\tilde{J}_{\vec{k}} = J - \int d^d \vec{r} J(\vec{r}) [1 - \cos(\vec{k} \cdot \vec{r})]$$

$J = \int d^d \vec{r} J(\vec{r}) \sim \int_0^\infty dr r^{d-1-d-\alpha} = \int_0^\infty dr r^{-1-\alpha}$ est bien convergente. Concernant le second terme, on écrit l'intégrale en coordonnées sphériques

$$\int d^d \vec{r} J(\vec{r}) [1 - \cos(\vec{k} \cdot \vec{r})] = \int_0^\infty dr r^{d-1} \int d^{d-1} \Omega J(\vec{r}) [1 - \cos(kr \cos(\theta_1))]$$

où $d^{d-1} \Omega$ est la mesure angulaire et θ_1 l'un des $d - 1$ angles. En insérant $J(\vec{r}) \sim r^{-d-\alpha}$, un changement de variable dans l'intégrale donne

$$\begin{aligned} \int d^d \vec{r} J(\vec{r}) [1 - \cos(\vec{k} \cdot \vec{r})] &\sim \int_1^\infty dr r^{-1-\alpha} \int d^{d-1} \Omega [1 - \cos(kr \cos(\theta_1))] \\ &= k^\alpha \int_k^\infty dr r^{-1-\alpha} \int d^{d-1} \Omega [1 - \cos(r \cos(\theta_1))] \underset{k \rightarrow 0}{\simeq} k^\alpha \underbrace{\int_0^\infty dr r^{-1-\alpha} \int d^{d-1} \Omega [1 - \cos(r \cos(\theta_1))]}_{=\text{cste}} \end{aligned}$$

Deux remarques : (i) on a introduit un cutoff à $r = 1$ (le pas du réseau). (ii) dans la limite $k \rightarrow 0$, on peut faire $\int_k dr \rightarrow \int_0 dr$ car l'intégrale $\int_0 dr r^{-1-\alpha}$ est convergente).

Finalement, on a montré que le développement de $\tilde{J}_{\vec{k}}$ est de la forme

$$\tilde{J}_{\vec{k}} \simeq J [1 - (bk)^\alpha] \quad \text{pour } \vec{k} \rightarrow 0. \quad (14)$$

On peut dire que cela correspond à une interaction de "portée intermédiaire" (gardons "longue portée" pour le cas où $J = \int d^d \vec{r} J(\vec{r}) = \infty$ si $J(\vec{r}) \sim r^{-\theta}$ pour $\theta < d$; l'énergie serait alors non extensive).

b) En procédant comme dans la question précédente, on voit que la singularité de l'intégrande est maintenant de la forme

$$\frac{1}{t + (kb)^\alpha} = \frac{1}{b^\alpha} \frac{1}{1/\xi^\alpha + k^\alpha} \quad \text{où } \boxed{\xi \stackrel{\text{def}}{=} b t^{-1/\alpha}} \quad (15)$$

L'exposant $\nu = 1/\alpha$ (de champ moyen) est donc affecté par l'interaction de portée intermédiaire.

2 Vortex dans un film supra – Équations de Bogomolny

Nous étudions un supraconducteur *bidimensionnel* soumis à un champ magnétique. Dans des unités appropriées (longueurs exprimées en unité $\sqrt{2}\lambda$) la fonctionnelle de Ginzburg-Landau décrivant l'état supra ($T < T_c$) est

$$\mathcal{F}[\psi] = \int d^2\vec{r} \left[\left| \left(\vec{\nabla} - i\vec{A}(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}) \right|^2 + \kappa^2 (1 - |\psi(\vec{r})|^2)^2 + \frac{1}{2} B(\vec{r})^2 \right] \quad (16)$$

1/ Le supercourant est $\vec{J}_s = -\frac{\delta}{\delta\vec{A}(\vec{r})} \int |\vec{D}\psi|^2 = 2\text{Im} [\psi^* \vec{D}\psi]$ où $\vec{D} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\nabla} - i\vec{A}$ est la dérivée covariante. Pour $\psi = f e^{i\chi}$ avec $f = |\psi|$, on obtient $\vec{J}_s = 2(\vec{\nabla}\chi - \vec{A})|\psi|^2$.

On considère un paramètre d'ordre décrivant un vortex :

$$\psi(r, \theta) = f(r) e^{in\theta} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \\ f(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1 \end{cases} \quad (17)$$

2/ La continuité de ψ impose $n \in \mathbb{Z}$. Par la suite on choisit $n \geq 0$. Le champ magnétique est rapidement écranté dans le supra, sur une distance λ . Champ et courant sont reliés par $\text{rot} B = \vec{J}_s$ (équation de Maxwell retrouvée en cours), donc le courant décroît aussi rapidement que le champ. On peut considérer que $\vec{J}_s \simeq 0$ pour $r \gg \lambda$.

Pour la solution (17), on obtient $\vec{J}_s = 2\left(\frac{n}{r} \vec{u}_\theta - \vec{A}\right)|\psi|^2$. Pour un circuit entourant le vortex à distance $r \gg \lambda$ on a

$$0 = \oint d\vec{r} \cdot \vec{J}_s = \oint d\vec{r} \cdot 2 \left(\frac{n}{r} \vec{u}_\theta - \vec{A} \right) = 2(2\pi n - \Phi)$$

où $\Phi = \int d^2\vec{r} B = \oint d\vec{r} \cdot \vec{A}$. D'où quantification du flux dans le supra

$$\Phi = 2\pi n \quad (18)$$

(en unité du quantum de flux $\Phi_0 = h/(2e)$). Cet argument a été discuté en TD.

3/ Le potentiel vecteur est $\vec{A} = A_\theta \vec{u}_\theta$ avec $A_\theta(r) = \frac{g(r)+n}{r}$.

Le champ magnétique est $B = \text{rot}\vec{A} = \vec{u}_z \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})$. En utilisant l'expression du gradient en coordonnées polaires $\vec{\nabla} = \vec{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{u}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$, on obtient

$$B(r) = \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} = \frac{g'(r)}{r} \quad (19)$$

Calculons la circulation le long d'un cercle \mathcal{C}_r de rayon r : $\oint_{\mathcal{C}_r} d\vec{r} \cdot \vec{A} = \int_{\text{disque}} d^2\vec{r} B$ est le flux magnétique dans le disque de rayon r , d'où

$$2\pi(g(r) + n) = 2\pi \int_0^r d\rho \rho B(\rho) \underset{r \rightarrow 0}{\simeq} \pi B(0) r^2 \quad (20)$$

On obtient $g(r) \simeq -n + \frac{1}{2} B(0) r^2$ pour $r \rightarrow 0$.

Le champ s'annule rapidement (typiquement exponentiellement) pour $r \gg 1$. La fonction $g(r)$ doit donc aussi s'annuler à grande distance.

4/ Pour le paramètre d'ordre on trouve

$$\left(\vec{\nabla} - i\vec{A}(\vec{r}) \right) \psi = e^{in\theta} \left[\vec{u}_r f'(r) - i\vec{u}_\theta \frac{f(r)g(r)}{r} \right] \quad (21)$$

d'où

$$\frac{\mathcal{F}}{2\pi} = \int_0^\infty dr r \left[f'(r)^2 + \left(\frac{f(r)g(r)}{r} \right)^2 + \kappa^2 (1 - f(r)^2)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{g'(r)}{r} \right)^2 \right] \quad (22)$$

Les dérivées fonctionnelles sont :

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta f(r)} = -2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) + 2 \frac{f(r)g(r)^2}{r} + 4r\kappa^2 f(r) (f(r)^2 - 1) \quad (23)$$

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta g(r)} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial g(r)}{\partial r} \right) + 2 \frac{f(r)^2 g(r)}{r} \quad (24)$$

Les deux équations pour les champs $f(r)$ et $g(r)$ qui minimisent \mathcal{F} sont donc

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \frac{g(r)^2}{r} f(r) = -2\kappa^2 f(r) (1 - f(r)^2) \quad (25)$$

$$g''(r) - \frac{g'(r)}{r} = 2f(r)^2 g(r) \quad (26)$$

i.e. deux équations différentielles du second ordre non linéaires couplées.

5/ Point de Bogomolny.— Nous considérons le supra pour $\kappa = 1/\sqrt{2}$.

a. Pour $\kappa = 1/\sqrt{2}$, l'énergie libre se simplifie :

$$\frac{\mathcal{F}}{2\pi} = \int_0^\infty dr r \left[f'(r)^2 + \left(\frac{f(r)g(r)}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} (1 - f(r)^2)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{g'(r)}{r} \right)^2 \right] \quad (27)$$

$$= \int_0^\infty dr r \left[\left(f'(r) + \frac{f(r)g(r)}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{g'(r)}{r} - 1 + f(r)^2 \right)^2 \right] \quad (28)$$

$$- 2 \frac{f(r)f'(r)g(r)}{r} + \frac{g'(r)(1 - f(r)^2)}{r} \quad (29)$$

On remarque alors que les derniers termes se combinent :

$$\int_0^\infty dr \left[\underbrace{-2f(r)f'(r)g(r) + g'(r)(1 - f(r)^2)}_{= \frac{d}{dr} [g(r)(1 - f(r)^2)]} \right] = [g(r)(1 - f(r)^2)]_{r=0}^{r=\infty} = -g(0) = n$$

en utilisant les comportements de f et g en $r = 0$ et à l'infini. Finalement

$$\boxed{\frac{\mathcal{F}}{2\pi} = n + \int_0^\infty dr r \left[\left(f'(r) + \frac{f(r)g(r)}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{g'(r)}{r} - 1 + f(r)^2 \right)^2 \right]} \quad (30)$$

Pour $\kappa = 1/\sqrt{2}$, l'énergie libre est la somme de deux termes quadratiques. Elle est minimisée lorsque chaque terme s'annule :

$$f'(r) + \frac{g(r)f(r)}{r} = 0 \quad (31)$$

$$\frac{g'(r)}{r} = 1 - f(r)^2 \quad (32)$$

Ce sont les **équations de Bogomolny**. Les équations sont maintenant du *premier* ordre !

Important pour la suite : la seconde correspond au champ magnétique

$$B(r) = 1 - f(r)^2. \quad (33)$$

b. On élimine $g(r)$. La première équation est $r \frac{f'(r)}{f(r)} = -g(r)$, d'où

$$\left[r \frac{f'(r)}{f(r)} \right]' = -g'(r) = -r(1 - f(r)^2) \quad (34)$$

i.e.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \ln f(r) = f(r)^2 - 1 \quad (35)$$

qui correspond en effet à l'équation de Liouville

$$\Delta \ln |\psi| = |\psi|^2 - 1 \quad (36)$$

Remarque : *stricto-sensu* l'équation de Liouville est $\Delta \varphi = e^{2\varphi} - 1$ pour $\varphi = \ln |\psi|$. Elle apparaît dans de nombreux contextes en théorie des champs.

c. Plus haut, on a obtenu $B(r) = 1 - f(r)^2$, d'où par intégration dans le plan

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \ln f(r) = -B(r) \quad \Rightarrow \quad 2\pi \int_0^\infty dr \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \ln f(r) = -2\pi \int_0^\infty dr r B(r) = -\Phi$$

ce qui donne

$$\left[r \frac{\partial}{\partial r} \ln f(r) \right]_{r=0}^{r=\infty} = -n \quad (37)$$

La contribution à l'infini est nulle car $f(\infty) = 1$. On vérifie aisément que la condition $r \frac{\partial}{\partial r} \ln f(r) \Big|_{r=0} = n$ correspond à $f(r) \propto r^n$ pour $r \rightarrow 0$.

d. **Taille du cœur du vortex pour $n \gg 1$.**— Notons R la taille du vortex. Intégrons $g'(r) = r(1 - f(r)^2)$, sur $[0, R]$:

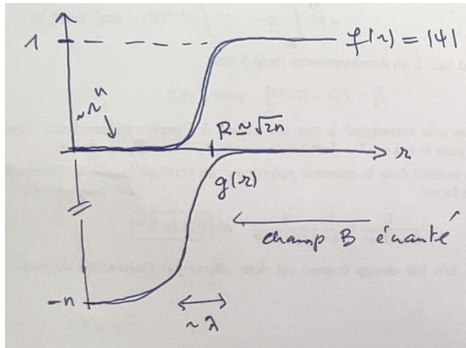
$$g(R) - g(0) = \frac{1}{2} R^2 - \int_0^R dr r f(r)^2 \quad (38)$$

Au bord, en pénétrant dans la zone supra le champ magnétique s'annule, $g(R) \simeq 0$. Dans le cœur du vortex $f(r) \propto r^n$, i.e. si $n \gg 1$, on peut écrire $f(r) \simeq 0$ (sauf si r proche du bord en R). Finalement $R^2 \simeq -2g(0) = 2n$ et donc le rayon du cœur du vortex est

$$\boxed{R \simeq \sqrt{2n}} \quad (39)$$

Si on écrit le flux $\Phi = 2\pi n \simeq \pi B(0)R^2$, cette expression de R donne $B(0) \simeq 1$. Le rayon est indépendant du champ appliqué. C'est ce qu'on voit sur la figure : en augmentant le champ, la taille des vortex reste la même mais leur nombre augmente (puisque le flux total augmente).

Tracer schématiquement les allures de $f(r)$ et $g(r)$: les deux fonctions varient sur la même échelle ~ 1 (i.e. $\lambda \sim \xi$).



Remarque : Le champ est $B(r) = 1 - f(r)^2$, i.e. présente le comportement $B(r) \simeq 1 - ar^{2n}$ dans le cœur du vortex. Il s'annule vers $r \approx R$.

6/ Supra de type II.

a) On cherche une équation différentielle pour B , i.e. pour g' . L'équation du champ a été obtenue plus haut, cf. (26) : on ne peut pas simplement la dériver, ce qui laisserait un g , néanmoins, on peut écrire

$$r \left(\frac{g'(r)}{r} \right)' = 2f(r)^2 g(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{2f(r)^2} \left(\frac{g'(r)}{r} \right)' = g(r) \quad (40)$$

qui est maintenant appropriée : une dérivation donne

$$\left(\frac{r}{2f(r)^2} \left(\frac{g'(r)}{r} \right)' \right)' = g'(r) \quad \text{i.e.} \quad \left(\frac{r}{2f(r)^2} B'(r) \right)' = r B(r) \quad (41)$$

ou plus explicitement

$$B''(r) + \left(\frac{1}{r} - \frac{2f'(r)}{f(r)} \right) B'(r) - 2f(r)^2 B(r) = 0 \quad (42)$$

b) Pour $\kappa \gg 1$, le paramètre d'ordre est $f(r) = |\psi| \simeq 1$ dès que $r \gtrsim \xi$. En remplaçant cela dans l'équation précédente, les deux premiers termes coïncident avec la partie radiale du Laplacien $\Delta B(r) = \frac{d^2 B(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dB(r)}{dr}$, i.e.

$$(\Delta - 2)B(r) \simeq 0 \quad \text{pour } r \gg \xi \quad (43)$$

La solution invariante par rotation et décroissante à l'infini est $B(r) \simeq A K_0(\sqrt{2}r)$, soit $B(r) \simeq A K_0(r/\lambda)$ en rétablissant λ . Elle présente une singularité à l'origine qui correspond avec la position du vortex. Cette expression est donc valable pour $r \gtrsim \xi$. On trouve $B(0) \simeq B(\xi) \simeq A \ln(2e^{-C}\lambda/\xi)$ d'où

$$\boxed{B(r) \simeq \frac{B(0)}{\ln(2\kappa e^{-C})} K_0(r/\lambda)} \simeq \frac{B(0)}{\ln(2\kappa e^{-C})} \times \begin{cases} \ln(2\lambda e^{-C}/r) & \text{pour } \xi \lesssim r \lesssim \lambda \\ \sqrt{\frac{\pi\lambda}{2r}} e^{-r/\lambda} & \text{pour } r \gtrsim \lambda \end{cases} \quad (44)$$

c) En utilisant l'équation de Maxwell, $\vec{J}_s = \text{rot} B = \vec{\nabla} \times (\vec{u}_z B(r))$, et $K'_0(x) = -K_1(x)$, on obtient

$$\vec{J}_s = -\vec{u}_\theta B'(r) \simeq \vec{u}_\theta \frac{B(0)}{\lambda \ln(2\kappa e^{-C})} K_1(r/\lambda) \quad (45)$$

qui présente aussi la décroissance $e^{-r/\lambda}$ à grande distance.

Notice biographique :

après un début de carrière à Moscou, **Evgeny Borisovich Bogomol'nyi** (Eugène Bogomolny) est rentré au CNRS au début des années 1990 (à la division de physique théorique de l'IPN d'Orsay, puis au LPTMS à sa création en 1998). Il était alors déjà connu pour ses travaux en théorie des champs et intégrabilité. L'article célèbre (3008 citations sur GoogleScholar) où il a introduit ce qu'on appelle aujourd'hui les équations de Bogomolny (décrivant notamment le point particulier $\kappa = \lambda/\xi = 1/\sqrt{2}$) est : E. B. Bogomol'nyi, *The stability of classical solutions*, Sov. J. Nucl. Phys. **24** (4), 449-454 (1976). Il a aussi fait des contributions très importantes dans le domaine du chaos quantique.



Pour en savoir plus :

On pourra consulter le livre de Laurent Lévy [3] où le profil du vortex dans le supra de type II est étudié. L'étude du cas $\kappa = 1/\sqrt{2}$ a suscité de nombreux travaux : le problème est inspiré par l'article [2]. On peut aussi mentionner l'article célèbre de Rebbi & Jacobs qui montrent que les vortex n'interagissent pas au point de Bogomolny. Plus récemment : [1, 4].

Références

- [1] A. V. Efanov, Exact N -vortex solutions to the Ginzburg-Landau equations for $\kappa = 1/\sqrt{2}$, Phys. Rev. B **56**, 7839–7842 (1997).
- [2] V. Hakim, A. Lemaître and K. Mallick, Giant vortices in the Ginzburg-Landau description of superconductivity, Phys. Rev. B **64**, 134512 (2001).
- [3] L.-P. Lévy, *Magnétisme et supraconductivité*, CNRS-InterÉditions, Paris (1997).
- [4] I. Luk'yanchuk, Theory of superconductors with κ close to $1/\sqrt{2}$, Phys. Rev. B **63**, 174504 (2001).
- [5] C. Texier and G. Roux, *Physique statistique : des processus élémentaires aux phénomènes collectifs*, Dunod, Paris, second edition (2024).