M1 Magistère de physique fondamentale – ENS PSay,

Option Transitions de phase – Examen

17 janvier 2025

Durée : 3h

L'utilisation de documents, calculatrices, téléphones portables,... est interdite.

Recommandations :

⚠ Consultez les informations en ANNEXE ⚠

Lisez attentivement l'énoncé et rédigez *succinctement* et *clairement* votre réponse.

n'oubliez pas de vous **relire**.

1 Ising avec interaction ferromagnétique de portée finie (∼ 1h)

On s'intéresse à un modèle d'Ising

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{r},\vec{r}\,'} J(\vec{r}-\vec{r}\,')\, s(\vec{r})\, s(\vec{r}\,') - \sum_{\vec{r}} B(\vec{r})\, s(\vec{r}) \tag{1}$$

où les spins $s(\vec{r}) = \pm 1$ sont placés sur un réseau hypercubique de pas $a = 1$, i.e. $\sum_{\vec{r}} \approx \int \mathrm{d}^d\vec{r}$. **Tous les spins interagissent entre eux** avec une interaction ferromagnétique $J(\vec{r}-\vec{r}\,') > 0$ telle que $J(\vec{r}) \to 0$ pour $r \to \infty$. Dans (1), $B(\vec{r})$ est le champ magnétique au site $\vec{r}$. Nous étudions ici la fonction de corrélation $C(\vec{r}-\vec{r}\,') \overset{\text{def}}{=} \langle s(\vec{r})s(\vec{r}\,')\rangle$ pour $T > T_c$ et $B(\vec{r}) = 0$.

1/ *Spin paramagnétique :* Si $H_0(s) = -B\, s$ avec $s = \pm 1$, rappeler l'expression de l'aimantation $M = \langle s\rangle$ (la moyenne canonique) en fonction de B et $\beta = 1/k_\mathrm{B}T$.

2/ Quel est l'état fondamental de (1) pour $B = 0$? Décrire aussi l'état du système si $T \to \infty$.

3/ Donner l'expression du champ local $B^{\mathrm{loc}}(\vec{r}) \overset{\text{def}}{=} -\frac{\delta H}{\delta s(\vec{r})}$. Déduire l'équation autocohérente pour l'aimantation locale $M(\vec{r}) = \langle s(\vec{r})\rangle$, dans l'approximation du champ moyen.

4/ Supposons qu'il existe une transition para-ferro à la température T_c. Si $T > T_c$, justifier que

$$M(\vec{r}) \simeq \beta \sum_{\vec{r}\,'} J(\vec{r}-\vec{r}\,') M(\vec{r}\,') + \beta B(\vec{r}) \qquad \text{pour } B(\vec{r}) \to 0\,. \tag{2}$$

5/ Que devient (2) en Fourier (i.e. pour $\widetilde{M}_{\vec{k}} = \int \mathrm{d}^d\vec{r}\, M(\vec{r})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}$) ? On introduira la TF de l'interaction $\widetilde{J}_{\vec{k}} = \int \mathrm{d}^d\vec{r}\, J(\vec{r}) \cos(\vec{k}\cdot\vec{r})$ (on suppose $J(-\vec{r}) = J(\vec{r})$).
On rappelle que la fonction de réponse $\chi(\vec{r})$ est définie par $M(\vec{r}) \simeq \int \mathrm{d}^d\vec{r}\,'\, \chi(\vec{r}-\vec{r}\,')\, B(\vec{r}\,') + \mathcal{O}(B^2)$. Déduire l'expression de $\widetilde{\chi}_{\vec{k}}$ en fonction de $\widetilde{J}_{\vec{k}}$.

6/ Quelle est la relation entre $\chi(\vec{r})$ et $C(\vec{r})$? Déduire que $C(\vec{r}) = \int \frac{\mathrm{d}^d\vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}}{1-\beta\,\widetilde{J}_{\vec{k}}}$.

7/ *a*) À quelle condition sur la décroissance de $J(\vec{r})$ sa transformée de Fourier présente-t-elle le comportement $\widetilde{J}_{\vec{k}} \simeq J\left[1-(R\,k)^2\right]$ pour $\vec{k} \to 0$? Exprimer J et R avec des intégrales faisant intervenir $J(\vec{r})$. Comme interpréter R ? Utiliser cette approximation de $\widetilde{J}_{\vec{k}}$ dans l'intégrale qui donne $C(\vec{r})$. Identifier T_c et introduire $t = (T-T_c)/T_c$.

b) Identifier la longueur de corrélation ξ. Retrouver l'exposant critique (de champ moyen) de la longueur de corrélation $\xi(t) \sim t^{-\nu}$. Quel comportement à grand $\vec{r}$ attend-on pour $C(\vec{r})$? (un calcul détaillé n'est ***pas*** demandé ; si vous êtes perdu, le calcul est facile en $d = 1$).

8/ On considère maintenant une interaction qui décroît comme $J(\vec{r}) \sim r^{-d-\alpha}$ avec $\alpha \in]0, 2[$.

a) Justifier le comportement $\widetilde{J}_{\vec{k}} \simeq J\left[1-(b\,k)^\alpha\right]$ pour $\vec{k} \to 0$.
Hint : Écrire $\widetilde{J}_{\vec{k}} = \int \mathrm{d}^d\vec{r}\, J(\vec{r}) - \int \mathrm{d}^d\vec{r}\, J(\vec{r})\,[1-\cos(\vec{k}\cdot\vec{r})]$ et utiliser un argument d'échelle.

b) Déduire l'exposant critique ν de la longueur de corrélation dans ce cas.

2 Vortex dans un film supra – Équations de Bogomolny ($\sim$ 1h55mm)

Nous étudions un supraconducteur *bidimensionnel* soumis à un champ magnétique. On rappelle que la physique est contrôlée par deux longueurs caractéristiques : la longueur de cohérence ξ et la longueur de London λ. La première contrôle les variations du paramètre d'ordre supra et la seconde les variations du champ magnétique (λ est aussi appelée la longueur de pénétration du champ). On introduit le rapport

$$\kappa \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda}{\xi} \tag{3}$$

Dans des unités appropriées (longueurs exprimées en unité $\sqrt{2}\,\lambda$ et champ magnétique en unité du champ critique $H_c/(\sqrt{2}\,\lambda) = \Phi_0/(2\pi\lambda^2)$ où $\Phi_0 = h/(2e)$ est le quantum de flux) la fonctionnelle de Ginzburg-Landau décrivant l'état supra (pour $T < T_c$) prend la forme

$$\mathcal{F}[\psi] = \int \mathrm{d}^2\vec{r}\,\left[\left|\left(\vec{\nabla} - \mathrm{i}\,\vec{A}(\vec{r})\right)\psi(\vec{r})\right|^2 + \kappa^2\left(1 - |\psi(\vec{r})|^2\right)^2 + \frac{1}{2}B(\vec{r})^2\right] \tag{4}$$

Ici $\vec{A}$ est dans le plan du film et $B = \vec{u}_z \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \partial_x A_y - \partial_y A_x$ désigne la composante du champ perpendiculaire au film.

1/ Calculer le supercourant $\vec{J}_s = -\frac{\delta}{\delta\vec{A}(\vec{r})}\int\left|\vec{D}\psi\right|^2$ où $\vec{D} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\nabla} - \mathrm{i}\,\vec{A}$ est la dérivée covariante. Si l'on écrit $\psi = f\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi}$ avec $f = |\psi|$, quelle forme a $\vec{J}_s$?

Dans le problème on s'intéresse à une configuration de type vortex, où le champ magnétique pénètre autour de l'origine où le paramètre d'ordre s'annule ($\psi \to 0$ pour $r \to 0$). À plus grande distance, l'ordre supra s'établit ($|\psi| \to 1$ pour $r \to \infty$) et le champ magnétique est écranté. Par la suite, on considère le paramètre d'ordre de la forme

$$\psi(r,\theta) = f(r)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \quad \text{avec} \quad f(r) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ et } f(r) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 1 \tag{5}$$

2/ Justifier que n est entier, qu'on choisira positif. Justifier que $\vec{J}_s \to 0$ "loin" du vortex, si $r \to \infty$ (pas de calcul !). Déduire que le flux magnétique $\Phi = \int \mathrm{d}^2\vec{r}\,B$ qui traverse le supra est quantifié.
Hint : cette question et la suivante requièrent $\vec{\nabla}$ en coordonnées polaires $\to$ cf. **annexe**.

3/ On paramétrise le potentiel vecteur sous la forme

$$\vec{A}(r,\theta) = A_\theta(r)\,\vec{u}_\theta \quad \text{avec} \quad A_\theta(r) = \frac{g(r)+n}{r} \tag{6}$$

où $\vec{u}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$. Déduire le champ magnétique $B = \vec{u}_z \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)$ en fonction de g. Le champ magnétique est fini dans le cœur du vortex. Montrer que $g(r) \simeq -n + \frac{1}{2}B(0)\,r^2$ si $r \to 0$. Comment se comporte $g(r)$ si $r \gg 1$ (i.e. distance $\gg \lambda$) ?

4/ Montrer que la fonctionnelle s'écrit comme une intégrale simple

$$\frac{\mathcal{F}}{2\pi} = \int_0^\infty \mathrm{d}r\,r\,\left[f'(r)^2 + \left(\frac{f(r)g(r)}{r}\right)^2 + \kappa^2\left(1 - f(r)^2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{g'(r)}{r}\right)^2\right] \tag{7}$$

Montrer que $\frac{\delta}{\delta f(r)}\int_0^\infty \mathrm{d}r\,r\,f'(r)^2 = -2\big(r\,f'(r)\big)'$ (on peut négliger les termes de bord). De même, discuter soigneusement $\frac{\delta}{\delta g(r)}\int_0^\infty \mathrm{d}r\,g'(r)^2/r$. Déduire les deux équations pour les champs $f(r)$ et $g(r)$ qui minimisent $\mathcal{F}$.

5/ **Point de Bogomolny.**— Nous considérons le supra pour $\kappa = 1/\sqrt{2}$. Cette valeur particulière sépare les supras de type I ($\kappa < 1/\sqrt{2}$) des supras de type II ($\kappa > 1/\sqrt{2}$) et correspond au changement de signe de la tension de surface.

a. **Équations de Bogomolny.**— Montrer que pour $\kappa = 1/\sqrt{2}$, l'énergie libre prend la forme

$$\frac{\mathcal{F}}{2\pi} = n + \int_0^\infty \mathrm{d}r\, r \left[\left(f'(r) + \frac{f(r)g(r)}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{g'(r)}{r} - 1 + f(r)^2 \right)^2 \right] \tag{8}$$

L'énergie libre est minimisée lorsque chaque terme quadratique s'annule. Écrire les deux équations différentielles couplées (équations de Bogomolny). Quelle simplification apparaît au point de Bogomolmny (comparer aux équations obtenues précédemment pour $\kappa \neq 1/\sqrt{2}$) ? Interpréter une des deux équations en terme du champ magnétique $B(r)$.

b. **Équation de Liouville.**— Montrer que l'on peut obtenir une équation pour $f(r)$ seulement. Montrer que cette équation correspond à l'équation de Liouville

$$\Delta \ln |\psi| = |\psi|^2 - 1 \tag{9}$$

c. Rappeler comment $1 - f(r)^2$ est relié au champ magnétique. En intégrant l'équation (9) dans le plan (i.e. selon $\int_0^\infty \mathrm{d}r\, r \cdots$), montrer que $f(r) \sim r^n$ pour $r \to 0$.

d. **Taille du cœur du vortex pour $n \gg 1$.**— On estime comme suit le rayon R du vortex : on intègre l'équation différentielle obtenue plus haut, $g'(r) = r\,(1 - f(r)^2)$, sur $[0, R]$. Dans l'équation ainsi obtenue, on peut écrire grossièrement que $f(r) \simeq 0$ dans le vortex (d'après la question précédente, cela est justifié pour $n \gg 1$). En supposant $R \gg 1$ on peut poser $g(R) \simeq 0$: pourquoi ? Déduire une approximation du rayon du vortex R. Comment R dépend-il du champ appliqué, i.e. de $B(0)$? Discuter la figure.

Tracer schématiquement les allures de $f(r)$ et $g(r)$ sur un même graphe.

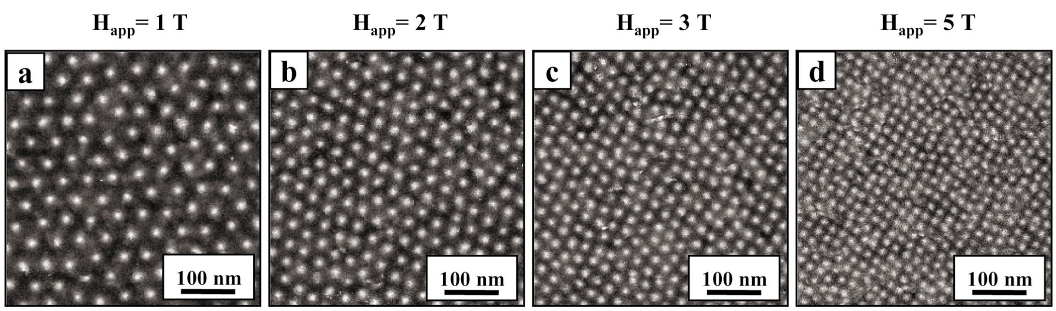

FIGURE 1 : *Réseau de vortex dans un film supra (V_3Si de 2mm d'épaisseur) pour différentes valeurs du champ magnétique. Tirée de :* C. E. Sosolik *et al.*, Phys. Rev. B **68** 140503(R) (2003).

6/ Vortex dans un supra de type II.

a) En reprenant l'équation pour g de la question **4/** ($\forall\ \kappa$), montrer que le champ obéit à l'équation

$$B''(r) + \left(\frac{1}{r} - \frac{2f'(r)}{f(r)} \right) B'(r) - 2f(r)^2\, B(r) = 0 \tag{10}$$

(Hint : déduire de l'équation différentielle pour g une équation différentielle pour g').

b) On considère $\kappa \gg 1$: dans ce régime, le paramètre d'ordre est $|\psi| \simeq 1$, sauf sur une petite région de taille ξ autour de l'origine (le cœur du vortex). Justifier alors la forme $(\Delta - 2)B \simeq 0$. La solution décroissant à l'infini (et singulière à l'origine) est donnée par la fonction de MacDonald d'indice 0 (cf. annexe). En revenant à des unités usuelles, justifier que $B(r) \simeq A\, K_0(r/\lambda)$ pour $r \gtrsim \xi$ et donner A en fonction $B(0)$, la valeur du champ pour $r \in [0, \xi]$. Tracer *soigneusement* $B(r)$ en illustrant les trois régions $r \lesssim \xi$, $\xi \lesssim r \lesssim \lambda$ et $r \gtrsim \lambda$. Tracer *l'allure* de $|\psi|$ sur la même figure.

c) Calculer également le supercourant $\vec{J}_s = \vec{\nabla} \times (\vec{u}_z B(r))$ et discuter son comportement (on donne $K_0'(x) = -K_1(x)$).

Relecture ($\sim$ 5mm)

Annexe

• Dérivation fonctionnelle : on peut utiliser $\frac{\delta\phi(y)}{\delta\phi(x)} = \delta(x-y)$.

• Transformation de Fourier $\tilde{f}_{\vec{k}} = \int_V \mathrm{d}^d\vec{r}\, f(\vec{r})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}$ et $f(\vec{r}) = \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}} \tilde{f}_{\vec{k}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}} \underset{V\to\infty}{\longrightarrow} \int \frac{\mathrm{d}^d\vec{k}}{(2\pi)^d}\, \tilde{f}_{\vec{k}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}$.

• Gradient en coordonnées polaires (en 2D) :

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{u}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

où $\vec{u}_r = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $\vec{u}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$ (noter que $\partial_\theta\vec{u}_r = \vec{u}_\theta$ et $\partial_\theta\vec{u}_\theta = -\vec{u}_r$).
Laplacien : $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$

• La solution de $(-\Delta + k^2)G(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$ fait intervenir la fonction de MacDonald. En 2D : $G(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi}\, K_0(kr)$. Son comportement pour $x \to 0$ est $K_0(x) \simeq \ln(2\mathrm{e}^{-\mathbf{C}}/x)$ (avec $\mathbf{C} \simeq 0.577$). Génériquement (indice quelconque) le comportement pour $x\to\infty$ est $K_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,\mathrm{e}^{-x}$.

SOLUTIONS : CF. http://www.lptms.universite-paris-saclay.fr/christophe_texier/