

Examen "Transitions de phase", 16/01/2026 – CORRECTION

1 Modèle d'Ising en champ transverse

Nous étudions le modèle d'Ising en champ transverse :

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i^z \sigma_j^z - B \sum_{i=1}^N \sigma_i^x \quad (12)$$

avec $J > 0$. Les états propres de σ_i^z sont notés $|+\rangle_i, |-\rangle_i$.

1/ • L'interaction $J > 0$ favorise l'ordre ferromagnétique. À $B = 0$ (et $J \neq 0$), l'état fondamental est donc

$$|\text{Ferro}+\rangle \stackrel{\text{def}}{=} |+\rangle_1 \otimes \cdots \otimes |+\rangle_N \quad \text{ou} \quad |\text{Ferro}-\rangle \stackrel{\text{def}}{=} |-\rangle_1 \otimes \cdots \otimes |-\rangle_N.$$

L'énergie du fondamental est $E_0 = -N_{\text{liens}} J$ avec $N_{\text{liens}} = Nq/2$.

• Lorsque $J = 0$ (et $B \neq 0$), les spins sont indépendants et s'alignent sur le champ. L'état fondamental est

$$|\text{Para}+\rangle \stackrel{\text{def}}{=} |x+\rangle_1 \otimes \cdots \otimes |x+\rangle_N \quad \text{ou} \quad |\text{Para}-\rangle \stackrel{\text{def}}{=} |x-\rangle_1 \otimes \cdots \otimes |x-\rangle_N$$

selon le signe de B , où $|x\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+\rangle \pm |-\rangle]$.

L'énergie fondamentale est donc cette fois $E_0 = -N|B|$.

Si on fait varier B/J de 0 à l'infini (à $T = 0$), on doit donc passer du fondamental $|\text{Ferro}\pm\rangle$, caractérisé par une aimantation $\langle \sigma_i^z \rangle = \langle \text{Ferro} \pm | \sigma_i^z | \text{Ferro} \pm \rangle = \pm 1$, à l'état $|\text{Para}\pm\rangle$ d'aimantation nulle $\langle \sigma_i^z \rangle = 0$. L'aimantation $\langle \sigma_i^z \rangle$ part d'une valeur finie pour $B = 0$ puis doit s'annuler lorsque B croît : *est-ce une transition de phase ou un comportement régulier ?*

On pourrait objecter que l'on ne fait que passer d'un état à $\langle \sigma_i^z \rangle \neq 0$ à un autre état à $\langle \sigma_i^x \rangle \neq 0$, cependant la nature des deux états ($|\text{Ferro}\pm\rangle$ et $|\text{Para}\pm\rangle$) est **très différente**. Dans le premier cas, c'est une aimantation *spontanée* avec des spins corrélés (au moins à courte distance), alors que dans le second, l'aimantation est simplement induite par le champ transverse et les moments selon \vec{u}_x sont indépendants. Il y a un changement de comportement profond du système en variant B/J .

2/ Champ moyen du modèle d'Ising à champ nul, $B = 0$ (questions de cours).

a) On introduit $m_z = \langle \sigma_i^z \rangle$, l'aimantation moyenne selon z . On écrit (cf. cours et TD)

$$\sigma_i^z \sigma_j^z = (m_z + \delta\sigma_i^z)(m_z + \delta\sigma_j^z) = m_z^2 + m_z(\delta\sigma_i^z + \delta\sigma_j^z) + \delta\sigma_i^z \delta\sigma_j^z = -m_z^2 + m_z(\sigma_i^z + \sigma_j^z) + \delta\sigma_i^z \delta\sigma_j^z$$

Dans l'approximation de champ moyen, on néglige le dernier terme de "fluctuations". On a donc

$$H_{\text{cm}} = +J m_z^2 \sum_{\langle i,j \rangle} 1 - J m_z \sum_{\langle i,j \rangle} (\sigma_i^z + \sigma_j^z) \quad (13)$$

En convertissant la somme sur les liens en somme sur les sites, $\sum_{\langle i,j \rangle} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \text{voisin}(i)}$, on déduit

$$H_{\text{cm}} = N \varepsilon_0 - B_{\text{loc}} \sum_{i=1}^N \sigma_i^z \quad \text{où} \quad \begin{cases} \varepsilon_0 = qJ m_z^2/2 \\ B_{\text{loc}} = qJ m_z \end{cases} \quad (14)$$

b) L'approximation de champ moyen rend le problème séparable $H_{\text{cm}} = \sum_i h_i$ où $h_i = \varepsilon_0 \mathbf{1}_2 - B_{\text{loc}} \sigma_i^z$ et $\mathbf{1}_2$ est la matrice identité. Les deux énergies (v.p. de h_i) sont $\varepsilon_0 \pm B_{\text{loc}}$, donc la fonction de partition est $z_{\text{cm}} = e^{-\beta\varepsilon_0} 2 \cosh(\beta B_{\text{loc}})$. On peut aussi écrire plus formellement

$$z_{\text{cm}} = \text{Trace} \{ e^{-\beta h_i} \} = e^{-\beta\varepsilon_0} \text{Trace} \{ e^{\beta B_{\text{loc}} \sigma_i^z} \} = e^{-\beta\varepsilon_0} 2 \cosh(\beta B_{\text{loc}}) \quad (15)$$

(σ_i^z est une matrice diagonale). On déduit l'énergie libre (fonction du paramètre variationnel)

$$f_{\text{cm}}(m_z) = \frac{qJ}{2} m_z^2 - \frac{1}{\beta} \ln(2 \cosh(\beta qJ m_z)) \quad (16)$$

Comme on est cultivé, on introduit déjà $T_c = qJ$:

$$f_{\text{cm}}(m_z) = \frac{T_c}{2} m_z^2 - \frac{1}{\beta} \ln(2 \cosh(\beta T_c m_z)) \quad (17)$$

c) Le paramètre variationnel est donné en minimisant l'énergie libre :

$$\frac{\partial}{\partial m_z} f_{\text{cm}}(m_z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m_z = \tanh(m_z T_c / T)} \quad (18)$$

On reconnaît « l'équation autocohérente ». L'analyse montre que la solution change de nature pour $T = T_c$, qui est la « température critique » :

- Si $T \geq T_c$, la solution est $m_z = 0$.
- Si $T < T_c$, la solution est $m_z \neq 0$.

d) Cf. cours et TD pour la résolution graphique.

m_z s'annule continûment en T_c , la transition est du **second ordre**.

e) On note $m_z = m_*(T)$ la solution positive (ou nulle) de (18).

- $m_*(T) = 0$ pour $T \geq T_c$.
- $T \lesssim T_c$, on développe (18) pour $m_z \rightarrow 0$:

$$m_z \simeq \frac{m_z T_c}{T} - \frac{1}{3} \left(\frac{m_z T_c}{T} \right)^3 \quad \Rightarrow \quad m_z \simeq \pm \sqrt{3 \frac{T_c - T}{T_c}} \quad (19)$$

On notera $m_*(T) \simeq \sqrt{3(T_c - T)/T_c}$, la solution positive.

- $T \ll T_c$, on attend $m_z \rightarrow 1$: on peut remplacer $\tanh(m_z T_c / T)$ par son développement pour grand argument

$$m_* \simeq 1 - 2e^{-\frac{2T_c}{T} m_*} \quad (20)$$

Il est justifié de remplacer m_* par 1 (le terme dominant) dans l'exponentielle,¹ d'où finalement

$$m_*(T) \simeq 1 - 2e^{-2T_c/T} \quad (21)$$

Ce comportement est caractéristique d'un système dont le spectre présente un **gap** $\Delta = 2T_c = 2qJ$, qui représente le coût énergétique d'une excitation élémentaire dans la phase ferromagnétique (le retournement d'un spin dans la phase ferro).

3/ Dans le cas $B \neq 0$, on peut reprendre l'analyse de champ moyen en ajoutant simplement le terme $-B \sum_i \sigma_i^x$ à l'hamiltonien de champ moyen. Le problème est toujours séparable, et le nouvel hamiltonien de champ moyen est

$$h_i = \varepsilon_0 \mathbf{1}_2 - B_{\text{loc}} \sigma_i^z - B \sigma_i^x = \varepsilon_0 \mathbf{1}_2 - \begin{pmatrix} B_{\text{loc}} & B \\ B & -B_{\text{loc}} \end{pmatrix} \quad (22)$$

Les deux valeurs propres de la matrice sont

$$E_{\pm} = \varepsilon_0 \pm \sqrt{B_{\text{loc}}^2 + B^2} = \frac{T_c}{2} m_z^2 \pm \sqrt{(T_c m_z)^2 + B^2} \quad (23)$$

4/ Le problème est séparable, donc $Z_{\text{cm}} = z_{\text{cm}}^N$ avec

$$z_{\text{cm}} = \text{Trace} \{ e^{-\beta h_i} \} = e^{-\beta E_+} + e^{-\beta E_-} = e^{-\beta \frac{T_c}{2} m_z^2} 2 \cosh \left(\beta \sqrt{(T_c m_z)^2 + B^2} \right) \quad (24)$$

Finalement

$$\boxed{f_{\text{cm}}(m_z) = \frac{T_c}{2} m_z^2 - \frac{1}{\beta} \ln \left(2 \cosh \left(\beta \sqrt{(T_c m_z)^2 + B^2} \right) \right)} \quad (25)$$

On vérifie bien qu'on retrouve le résultat Ising si $B = 0$.

¹on pourrait itérer :

$$m_* \simeq 1 - 2 \exp \left\{ -\frac{2T_c}{T} \left(1 - 2e^{-\frac{2T_c}{T} m_*} \right) \right\}$$

ce qui montre que le terme négligé dans l'exponentielle est $\sim \frac{2T_c}{T} e^{-\frac{2T_c}{T}} \ll 1$. Ok

5/ L'équation autocohérente donne m_z , comme on l'a vu. Ici, $\frac{\partial}{\partial m_z} f_{\text{cm}}(m_z) = 0$ donne

$$m_z = \frac{T_c m_z}{\sqrt{(T_c m_z)^2 + B^2}} \tanh\left(\beta \sqrt{(T_c m_z)^2 + B^2}\right) \quad (26)$$

i.e. soit $m_z = 0$, soit

$$\sqrt{m_z^2 + (B/T_c)^2} = \tanh\left(\beta \sqrt{(T_c m_z)^2 + B^2}\right). \quad (27)$$

On peut aussi obtenir $m_x = \langle \sigma_i^x \rangle$ en utilisant que σ_i^x est conjugué au champ transverse B , donc $m_x = -\frac{\partial}{\partial B} f_{\text{cm}}(m_z)$, d'où

$$m_x = \frac{B}{\sqrt{(T_c m_z)^2 + B^2}} \tanh\left(\beta \sqrt{(T_c m_z)^2 + B^2}\right). \quad (28)$$

6/ Si $\beta \rightarrow \infty$ on obtient $\tanh(\beta \varepsilon) \rightarrow \text{sign}(\varepsilon)$.

7/ **Transition de phase quantique (à $T = 0$)** : Si $T \rightarrow 0$ (i.e. $\beta \rightarrow \infty$) l'équation (26) devient $m_z = m_z / \sqrt{m_z^2 + (B/T_c)^2}$ qui a deux types de solutions :

- Soit $\sqrt{m_z^2 + (B/T_c)^2} = 1$, ce qui n'est possible que pour $|B/T_c| \leq 1$, et donc $m_z(0, B) = \sqrt{1 - (B/T_c)^2}$.
- Si $|B| > T_c$, alors $\sqrt{m_z^2 + (B/T_c)^2} > 1$ et donc $m_z = 0$.

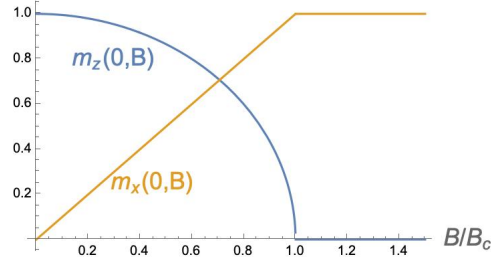
Finalement

$$m_z(0, B) = \begin{cases} \sqrt{1 - (B/T_c)^2} & \text{pour } |B| \leq T_c \\ 0 & \text{pour } |B| \geq T_c \end{cases} \quad (29)$$

On peut injecter cette solution dans (28), ce donne immédiatement

$$m_x(0, B) = \begin{cases} \frac{B}{T_c} & \text{pour } |B| \leq T_c \\ \text{sign}(B) & \text{pour } |B| \geq T_c \end{cases} \quad (30)$$

Les deux observables présentent un changement de comportement à $B = T_c = qJ$, ce qu'on interprète comme une valeur critique pour le champ $\boxed{B_c = qJ}$. C'est une transition de phase *continue* (du 2nd ordre) à $T = 0$, pilotée par le champ.



La transition de phase est pilotée par un paramètre différent de la température (le champ) à $T = 0$: on parle de « transition de phase quantique ».

8/ **Diagramme de phase dans le demi-plan (T, B) .**

a) L'équation (27) pour m_z a la même forme que (18) en substituant $m_z \rightarrow \sqrt{m_z^2 + (B/T_c)^2}$. Nous avons noté $m_*(T)$ la solution de (18), donc ici on peut écrire

$$\sqrt{m_z^2 + (B/T_c)^2} = m_*(T) \quad (31)$$

i.e.

$$\boxed{m_z(T, B) = \sqrt{m_*(T)^2 - (B/T_c)^2} \quad \text{pour } |B|/T_c \leq m_*(T)} \quad (32)$$

Cette solution n'existe que pour $|B|/T_c \leq m_*(T)$. Pour plus fort champ, le système doit donc choisir l'autre solution

$$m_z(T, B) = 0 \quad \text{pour } |B|/T_c \geq m_*(T). \quad (33)$$

En utilisant (28), on obtient $m_x(T, B) = \frac{B/T_c}{m_*(T)} \tanh\left(\frac{T_c}{T} m_*(T)\right)$, et en utilisant que $m_* = \tanh(T_c m_*/T)$, on déduit finalement que

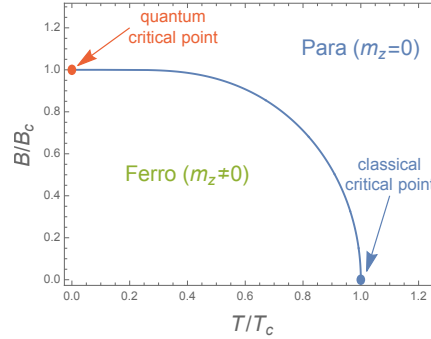
$$\boxed{m_x(T, B) = \frac{B}{T_c}} \quad (34)$$

(pour cela on a utilisé $m_* \neq 0$). C'est la même expression qu'à $T = 0$.

b) L'aimantation $m_z(T, B)$ s'annule lorsque

$$m_*(T) = \frac{|B|}{T_c} \quad (35)$$

Ce qui définit une ligne dans le plan (T, B) . Il suffit de reprendre l'étude de $m_*(T)$ pour la tracer. Cela donne le diagramme de phase suivant



où la ligne est une **ligne de transition du 2nd ordre**, quantique à une extrémité et classique à l'autre (je n'ai pas dessiné la partie inférieure, pour $B < 0$, symétrique).

Remarque : On peut même être très explicite avec le truc suivant (chapitre 10 de [1]) : L'équation auto-cohérente du modèle d'Ising est $m = \tanh(T_c m/T)$. On ne peut pas avoir une forme analytique pour $m = m_*(T)$, en revanche on peut trouver la fonction inverse $T = m_*^{-1}(m)$; notons la plutôt $T = T_*(m)$:

$$T_*(m) = \frac{T_c m}{\operatorname{argth}(m)} = \frac{2T_c m}{\ln\left(\frac{1+m}{1-m}\right)} \quad (36)$$

Si on revient au modèle d'Ising en champ transverse, la ligne du plan (T, B) où $m_z(T, B) = 0$ est donc

$$T = T_*(B/T_c) = \frac{B}{\operatorname{argth}(B/T_c)} \quad (37)$$

c) Dans la région "Para" on pose $m_z = 0$ dans (28), ce qui donne $m_x = \frac{B}{|B|} \tanh(|B|/T)$, i.e.

$$m_x(T, B) = \tanh(B/T) \quad (38)$$

qui est bien l'aimantation d'un paramagnétique.

Pour être confiant, on peut vérifier qu'il y a continuité entre cette expression et (34) : sur la ligne de transition on a $B/T_c = m_*$. Eq. (34) nous dit $m_x = B/T_c = m_* = \tanh(T_c m_*/T)$, et en réinjectant $m_* = B/T_c$ dans le \tanh , on trouve bien $m_x = \tanh(B/T)$. QED : il y a continuité de $m_x(T, B)$ sur la ligne de transition du second ordre.

Ising en champ transverse : Le modèle a été introduit avec des motivations complètement différentes (comme modèle effectif pour décrire les modes collectifs de vibration dans un cristal ferroélectrique dans lequel des protons sont soumis à un potentiel fortement anharmonique; le modèle est alors censé décrire le tunneling des protons) :

P. G. de Gennes, « *Collective motion of hydrogen bonds* », Solid State Communications **1**, 132–137 (1963). (de Gennes est un physicien théoricien français ayant reçu le prix Nobel de physique en 1991).

Le modèle a quelques réalisations dans des systèmes magnétiques. Le diagramme de phase a été mesuré dans un composé à base d'un lanthanide LiHoF_4 (Lithium-Holmium-Fluor) dans un article qui a eu beaucoup d'écho :

D. Bitko, T. F. Rosenbaum and G. Aeppli, « *Quantum Critical Behavior for a Model Magnet* », Physical Review Letters **77**, 940 (1996)

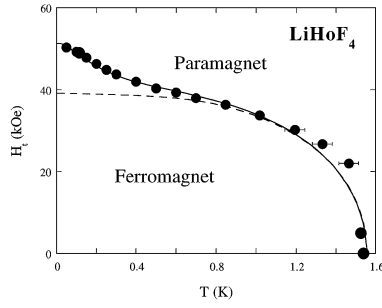


FIG. 3. Experimental phase boundary (filled circles) for the ferromagnetic transition in the transverse field-temperature plane. Dashed line is a mean-field theory including only the electronic spin degrees of freedom; solid line is a full mean-field theory incorporating the nuclear hyperfine interaction [Eq. (2)]. Both theories have the same two fitting parameters.

L'accord avec la théorie de champ moyen que nous venons de discuter est assez remarquable. Il est expliqué par la nature dipolaire des interactions : les spins n'interagissent pas seulement avec leur plus proches voisins mais avec une interaction qui décroît comme $1/r^3$; on parle de « modèle d'Ising dipolaire » pour lequel la dimension critique supérieure est $d_{\text{sup}} = 3$ (et non $d_{\text{sup}} = 4$ comme pour Ising habituel). La déviation aux plus basses températures s'explique par le rôle du spin nucléaire (couplage hyperfin), qui complique un peu le modèle de champ moyen. Si la nature dipolaire de l'interaction est faible ($T_c \simeq 1.53$ K sur la figure ci-dessus), ce qui permet d'espérer observer la transition de phase quantique, il semblerait que le fort couplage hyperfin limite l'observation de criticalité quantique. Ainsi d'autres études expérimentales pour d'autres composés ont été réalisées dans lesquels le couplage hyperfin devient faible. Par exemple, l'article suivant (expérimental) étudie des « single molecule magnets » de $(\text{C}_6\text{H}_{15}\text{N}_3)_6\text{Fe}_8\text{O}_2(\text{OH})_{12}$:

E. Burzuri *et al.*, « *Magnetic Dipolar Ordering and Quantum Phase Transition in an Fe_8 Molecular Magnet* », Physical Review Letters **107**, 097203 (2011).

Le diagramme de phase est en effet plus proche de celui qu'on a obtenu dans le problème.

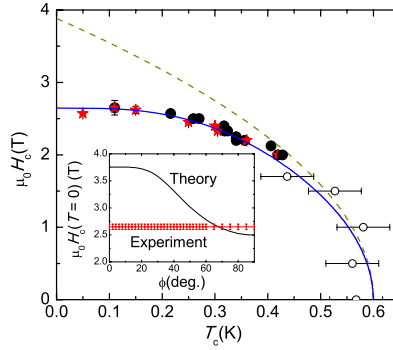


FIG. 3 (color online). H_c - T_c phase diagram determined from the linear extrapolation of $1/\chi'$ to $1/\chi'_{\text{max}}$, as shown in Figs. 2(a) and 2(b). ● and ○ correspond to $T_c > T_b$ and $T_c < T_b$, respectively; ★, data determined from susceptibility scaling plots, as those shown in Fig. 2(c). Solid line, quantum mean-field calculation of the phase boundary using Eq. (4); dashed line, classical phase diagram, derived from MC simulations. Inset: Zero-temperature critical field vs angle ϕ . The horizontal line represents the experimental $H_c(T_c = 0)$.

Criticalité quantique : Le modèle d'Ising en champ transverse est intéressant car c'est le modèle le plus simple qui présente une transition de phase quantique. On a étudié dans le cours des transitions pilotées par la température, se produisant à $T > 0$. Dans le cas de la transition para/ferro habituelle, les fluctuations *thermiques* déstabilisent la phase (ferro) ordonnée. Ici, pour $T = 0$, il n'y a plus de fluctuations thermiques, néanmoins, les termes $\propto \sigma_i^x$ induisent des transitions (de nature quantique) entre états propres $|\pm\rangle_i$ associés à l'état ferro. On dit que l'état ferro est déstabilisé par les « *fluctuations quantiques* » et on parle de « **transition de phase quantique** ». Dans le diagramme de phase (T, B^x) (ce qu'on a étudié), le point $(T_c, 0)$ est le point critique (classique) habituel, au voisinage duquel se manifestent des propriétés critiques (invariance d'échelle, etc). Le point $(0, B_c)$ est un point où a lieu une autre transition du second ordre. On s'attend aussi à ce que son voisinage soit caractérisé par des propriétés critiques et on parle de « *point critique quantique* ». Vous trouverez une pléthore de travaux sur la « *criticalité quantique* », une question encore très débattue, notamment car liée à l'étude de la supra à haute T_c dans les cuprates. Si cela vous intrigue, vous pouvez jeter un œil au livre de S. Sachdev [2].

2 Interface métal normal-supraconducteur au point de Bogomolny

Les trois premières questions ont été discutées en cours et/ou TD.

1/ L'équation du champ pour le paramètre d'ordre est $\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \psi^*(\vec{r})} = 0$, soit

$$\boxed{-\vec{D}^2 \psi + 2\kappa^2 (|\psi|^2 - 1) \psi = 0} \quad (39)$$

2/ Le supercourant est

$$\vec{J}_s(\vec{r}) = -\frac{\delta}{\delta \vec{A}(\vec{r})} \int |\vec{D}\psi|^2 = -i\psi^* \vec{D}\psi + i\psi (\vec{D}\psi)^* = 2 \operatorname{Im} [\psi^* \vec{D}\psi] \quad (40)$$

qui est l'expression habituelle du courant en MQ. L'équation du champ EM est

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J}_s \quad (41)$$

(équation de Ampère-Maxwell).

Les deux équations pour les champs ψ et \vec{A} sont du second ordre, couplées et non linéaires (super dur!)

3/ **Supraconducteur de type I avec $\kappa \ll 1$.**— On considère une situation 1D $\psi(\vec{r}) \rightarrow \psi(x)$ (ce qui permet de supposer le champ réel). Dans la limite $\kappa \ll 1$, le champ magnétique est très vite écranté dans le supra, donc on fait l'approximation que $\vec{B} = 0$ pour $x > 0$ et $\psi = 0$ pour $x < 0$. On n'a plus qu'à étudier l'équation pour le champ ψ , qui devient

$$-\psi''(x) + 2\kappa^2 (\psi(x)^2 - 1) \psi(x) = 0 \quad \text{pour } x > 0 \quad (42)$$

avec $\psi(0) = 0$ à l'interface N/S. L'analogie avec l'équation de Newton nous permet d'identifier une constante du mouvement : on interprète $F(\psi) = 2\kappa^2 (\psi^2 - 1) \psi$ comme une "force" dérivant du "potentiel" $U(\psi) = -\frac{1}{2}\kappa^2(\psi^2 - 1)^2$. Donc

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} [\psi'(x)]^2 + U(\psi(x)) \quad (43)$$

est l'énergie mécanique conservée.

Pour la "solution interface" ($\psi(0) = 0$ et $\psi(+\infty) = 1$), on utilise que $\psi(+\infty) = 1$ et $\psi'(+\infty) = 0$ ce qui donne $\mathcal{E} = 0$ d'où $[\psi'(x)]^2 = -2U(\psi(x))$. Comme on cherche une solution croissante on a

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = +\sqrt{-2U(\psi(x))} \quad (44)$$

ce qui s'intègre facilement

$$\int_{\psi(0)}^{\psi(x)} \frac{d\psi}{\sqrt{-2U(\psi)}} = x \quad \text{soit} \quad \int_0^{\psi(x)} \frac{d\psi}{1 - \psi^2} = \kappa x \quad (45)$$

en ayant fait attention à ce qu'on cherche une solution t.q. $|\psi(x)| < 1$ et en ayant choisi $\psi(0) = 0$ (le bord de la région supra où le champ est supposé s'annuler). L'intégrale est facile à calculer en écrivant $\frac{1}{1-\psi^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+\psi} + \frac{1}{1-\psi} \right]$ d'où $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\psi(x)}{1-\psi(x)} \right) = \kappa x$, ou encore $\psi(x) = \tanh(\kappa x)$.

On peut revenir aux unités standard en faisant $x \rightarrow x/\sqrt{2}\lambda$, d'où

$$\boxed{\psi(x) = \tanh \left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi} \right)} \quad (46)$$

ce qui est une écriture plus naturelle car ξ est l'échelle caractéristique pour $\psi(x)$. En particulier on obtient $\psi(x) \simeq 1 - 2e^{-\sqrt{2}x/\xi}$ à grande distance de l'interface.

4/ **Supra au point de Bogomolny ($\kappa = 1/\sqrt{2}$).**— Nous allons voir que le cas particulier $\kappa = 1/\sqrt{2}$ produit une simplification remarquable. Nous considérons une section $S = L_y L_z$ avec $x \in [-L, +\infty[$. Le champ $\psi(x)$ est supposé **réel** et nous faisons un choix de jauge asymétrique $\vec{A}(x) = g(x) \vec{u}_y$.

a) Le champ magnétique est donc $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = g'(x) \vec{u}_z$.

On écrit la fonctionnelle de GL pour ces formes simplifiées des champs. Notons que

$$|\vec{D}\psi|^2 = |D_x\psi|^2 + |D_y\psi|^2 + |D_z\psi|^2 = (\partial_x\psi)^2 + |(\partial_y - iA_y)\psi|^2 + 0 = \psi'(x)^2 + g(x)^2\psi(x)^2$$

D'où

$$\frac{\mathcal{F}}{S} = \int_{-L}^{+\infty} dx \left\{ \psi'(x)^2 + g(x)^2\psi(x)^2 + \underbrace{\kappa^2}_{=1/2} (1 - \psi(x)^2)^2 + \frac{1}{2}g'(x)^2 \right\} \quad (47)$$

b) La fonction $g(x)$ est liée au choix de jauge, on peut toujours ajouter une constante à \vec{A} et donc choisir $g(-L) = 0$.

Le point remarquable est qu'avec $\kappa^2 = 1/2$ on peut regrouper les deux derniers termes de la fonctionnelle et écrire

$$\frac{\mathcal{F}}{S} = \int_{-L}^{+\infty} dx \left\{ [\psi'(x) + g(x)\psi(x)]^2 - 2\psi'(x)g(x)\psi(x) + \frac{1}{2}[g'(x) - 1 + \psi(x)^2]^2 + g'(x)(1 - \psi(x)^2) \right\} \quad (48)$$

$$= \int_{-L}^{+\infty} dx \left\{ [\psi'(x) + g(x)\psi(x)]^2 + \frac{1}{2}[g'(x) - 1 + \psi(x)^2]^2 + \frac{d}{dx}[g(x)(1 - \psi(x)^2)] \right\} \quad (49)$$

En utilisant que $\psi(+\infty) = 1$ et notre choix de jauge $g(-L) = 0$, on peut éliminer le troisième terme qui produit des termes de bord nuls. On obtient finalement

$$\boxed{\frac{\mathcal{F}[\psi, g \vec{u}_y]}{S} = \int_{-L}^{+\infty} dx \left\{ [\psi'(x) + g(x)\psi(x)]^2 + \frac{1}{2}[g'(x) - 1 + \psi(x)^2]^2 \right\}} \quad (50)$$

C'est pas beau ?

Par la suite on fera $L \rightarrow \infty$.

c) Comme la fonctionnelle est une forme quadratique, elle est minimisée lorsque les deux termes quadratiques sont nuls, d'où

$$\psi'(x) + g(x)\psi(x) = 0 \quad (51)$$

$$g'(x) = 1 - \psi(x)^2 \quad (52)$$

On a obtenu deux équations différentielles couplées du 1er ordre... qui deviennent faciles à résoudre !

Remarquons que la seconde équation donne le champ magnétique

$$B_z(x) = 1 - \psi(x)^2 \quad (53)$$

La première équation se réécrit $g = -\psi'/\psi = -[\ln|\psi|]'$, on la combine avec la seconde équation et on déduit une équation non-linéaire pour ψ seul

$$\frac{d^2}{dx^2} \ln|\psi(x)| = \psi(x)^2 - 1 \quad (54)$$

Cette équation peut être transformée en une équation bien connue ne posant $\psi(x) = e^{\varphi(x)}$ (cela suppose $\psi(x) > 0$). On obtient l'**équation de Liouville**

$$\boxed{\varphi''(x) = e^{2\varphi(x)} - 1} \quad (55)$$

qu'on va étudier sur \mathbb{R} (i.e. maintenant on fait $L \rightarrow \infty$).

d) Même problème que dans la question sur le supra de type I. On interprète le membre de droite de (55) comme une "force" dérivant du "potentiel" $V(\varphi) = \frac{1}{2} + \varphi - \frac{1}{2}e^{2\varphi}$:

$$\varphi''(x) = -V'(\varphi(x)) \quad (56)$$

On a donc une constante du mouvement

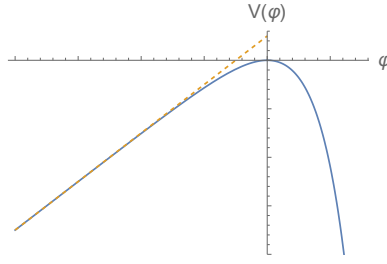
$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}[\varphi'(x)]^2 + V(\varphi(x)) \quad (57)$$

Le potentiel présente les comportements :

(i) $V(\varphi) \simeq \varphi + 1/2$ pour $\varphi \rightarrow -\infty$

(ii) $V(\varphi) \simeq -\varphi^2$ pour $\varphi \rightarrow 0$

(iii) $V(\varphi) \simeq -\frac{1}{2}e^{2\varphi}$ pour $\varphi \rightarrow +\infty$



- e) Pour l'interface, $|\psi(x)| < 1$ et $\psi(+\infty) = +1$, ce qui correspond à $\varphi(x) < 0$ et $\varphi(+\infty) = 0$ (et donc $\varphi'(+\infty) = 0$) d'où $\mathcal{E} = 0$. On a donc

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = +\sqrt{-2V(\varphi(x))} \quad (58)$$

ce qui s'intègre en

$$\int_{\varphi(0)}^{\varphi(x)} \frac{d\varphi}{\sqrt{-2V(\varphi)}} = x \quad (59)$$

- f) On choisit $\psi(0) = 1/2$ (donc $\varphi(0) = -\ln 2$), d'où

$$\int_{-\ln 2}^{\varphi(x)} \frac{d\varphi}{\sqrt{e^{2\varphi} - 2\varphi - 1}} = x \quad (60)$$

Un changement de variable $\varphi = \ln y$ permet de revenir au champ supra

$$G(\psi(x)) = \int_{1/2}^{\psi(x)} \frac{dy}{y\sqrt{y^2 - 1 - 2\ln y}} = x. \quad (61)$$

- g) L'expression précédente est de la forme $G(\psi(x)) = x$, ce qui donne le champ supra $\psi(x) = G^{-1}(x)$. Les comportements limites de G sont

$$G(\psi) \simeq \begin{cases} -\sqrt{2\ln(1/\psi)} & \text{pour } \psi \rightarrow 0^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{1}{1-\psi}\right) & \text{pour } \psi \rightarrow 1^- \end{cases} \quad (62)$$

Ce qui correspond aux comportements limites de G^{-1}

$$\psi(x) \simeq \begin{cases} e^{-\frac{1}{2}x^2} & \text{pour } x \rightarrow -\infty \\ 1/2 & \text{pour } x = 0 \\ 1 - e^{-\sqrt{2}x} & \text{pour } x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (63)$$

Les comportements sont très différents des deux côtés ! Le champ supra décroît beaucoup plus vite dans la région normale qu'il ne tend vers $\psi(+\infty) = 1$ dans la région supra. Mais notons que le champ supra pénètre dans la région normale : c'est « **l'effet de proximité** », i.e. de supra induite dans un métal normal par proximité avec un métal supra.

En utilisant $B_z(x) = 1 - \psi(x)^2$ on déduit le champ magnétique

$$B_z(x) \simeq \begin{cases} 1 - e^{-x^2} & \text{pour } x \rightarrow -\infty \\ 3/4 & \text{pour } x = 0 \\ 2e^{-\sqrt{2}x} & \text{pour } x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (64)$$

Comportements limites de $G(\psi)$: (la question que je vous ai épargnée !) Il est instructif de faire un peu d'analyse asymptotique de la fonction

$$G(\psi) = \int_{1/2}^{\psi} \frac{dy}{y\sqrt{y^2 - 1 - 2\ln y}} \quad (65)$$

afin de démontrer les comportements (62).

Commençons par le comportement pour $\psi \rightarrow 0$: dans cette limite le terme y^2 sous la racine devient négligeable comparé au log. On peut écrire

$$G(\psi) \underset{\psi \rightarrow 0^+}{\simeq} \int_{\psi} \frac{d \ln(1/y)}{\sqrt{2 \ln(1/y) - 1}} \simeq -\sqrt{2 \ln(1/\psi) - 1} = -\sqrt{2 \ln(e^{-1/2}/\psi)} \quad (66)$$

J'ai gardé le -1 sous la racine car dans la pratique le $\ln(1/\psi)$ croît très lentement.

Pour $\psi \rightarrow 1^-$, écrivons

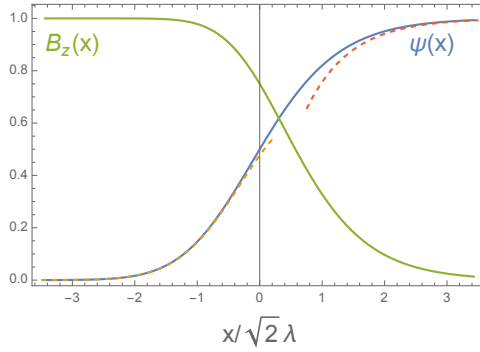
$$G(\psi) = \int_{1-\psi}^{1/2} \frac{du}{(1-u)\sqrt{u^2 - 2u - 2 \ln(1-u)}} \simeq \int_{1-\psi} \frac{du}{\sqrt{2u^2 + \mathcal{O}(u^3)}} \quad (67)$$

On voit donc que l'intégrale développe une divergence logarithmique pour $1 - \psi \rightarrow 0^+$:

$$G(\psi) \underset{\psi \rightarrow 1^-}{\simeq} \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{1}{1-\psi} \right) \quad (68)$$

QED.

- h) L'interface n'a pas une position précise mais le champ supra varie autour de $x = 0$, qu'on peut définir comme la position de l'interface N/S (c'est parce que l'on a imposé $\psi(0) = 1/2$, une définition possible de l'interface).



J'ai aussi tracé les comportements limites. L'approximation pour $x \rightarrow -\infty$ discutée plus haut, $G(\psi) \simeq -\sqrt{2 \ln(1/\psi)}$, est assez mauvaise (forcément, avec des log...) : il faut améliorer le développement de G et utiliser

$$G(\psi) \simeq -\sqrt{2 \ln(e^{-1/2}/\psi)} + C \quad \text{pour } \psi \rightarrow 0^+ \quad (69)$$

où la constante est $C \simeq 0.685$ (cf. ci-dessous). Ce qui donne

$$\psi(x) \simeq e^{-\frac{1}{2}[1+(x-C)^2]} \quad \text{pour } x \rightarrow -\infty \quad (70)$$

qui est l'approximation tracée en tirets orange (excellente).

Si on réintroduit $x \rightarrow x/\sqrt{2}\lambda$, on écrira les comportements du champ magnétique comme $B_z(x) \simeq 1 - e^{-\frac{1}{2}(x/\lambda)^2}$ pour $x \rightarrow -\infty$ et $B_z(x) \simeq 2e^{-x/\lambda}$ pour $x \rightarrow +\infty$.

Pour le comportement du paramètre supra pour $x \rightarrow +\infty$, on trouve une forme identique à celle trouvée au début $\psi(x) \simeq 1 - e^{-\sqrt{2}x/\xi}$ (toutefois avec un facteur pré-exponentiel qui diffère). C'était attendu car, profondément dans le supra, le champ magnétique est nul et on n'a plus le problème de résoudre deux équations différentielles couplées compliquées.

Comment trouver la constante C ? (pour ceux qui, comme leur professeur, aiment les intégrales ☺) : On a vu que l'intégrale

$$\tilde{G}(\psi) = \int_{1/2}^{\psi} \frac{dy}{y \sqrt{2 \ln(1/y) - 1}} \quad (71)$$

définie pour $\psi < e^{-1/2}$, était facile à calculer :

$$\tilde{G}(\psi) = - \int_{1/2}^{\psi} \frac{d \ln(1/y)}{\sqrt{2 \ln(1/y) - 1}} = -\sqrt{2 \ln(1/\psi) - 1} + \sqrt{\ln 4 - 1}. \quad (72)$$

Considérons donc la différence avec la fonction qui nous intéresse :

$$G(\psi) - \tilde{G}(\psi) = \int_{\psi}^{1/2} \frac{dy}{y} \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{-1 + 2 \ln(1/y)}} - \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1 + 2 \ln(1/y)}}}_{\sim y^2 (2 \ln(1/y) - 1)^{-3/2} \text{ pour } y \rightarrow 0} \right) \xrightarrow{\psi \rightarrow 0} \tilde{C} \simeq 0.063\,563\,3.. \quad (73)$$

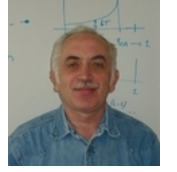
La différence des intégrales converge pour $\psi \rightarrow 0$, et a été calculée numériquement. Si je pose $C = \sqrt{\ln 4 - 1} + \tilde{C} \simeq 0.685089$, on a donc

$$G(\psi) \underset{\psi \rightarrow 0^+}{\simeq} -\sqrt{2 \ln(e^{-1/2}/\psi)} + C + \mathcal{O}\left(\frac{\psi^2}{[2 \ln(e^{-1/2}/\psi)]^{3/2}}\right) \quad (74)$$

qui est une très bonne approximation de la fonction, avec erreur bien contrôlée.

Notice biographique :

après un début de carrière à Moscou, **Evgeny Borisovich Bogomol'nyi** (Eugène Bogomolny) est rentré au CNRS au début des années 1990 (à la division de physique théorique de l'IPN d'Orsay, puis au LPTMS à sa création en 1998). Il était alors connu pour ses travaux en théorie des champs et intégrabilité. L'article célèbre (3125 citations sur GoogleScholar à ce jour) où il a introduit ce qu'on appelle aujourd'hui les équations de Bogomolny (décrivant notamment le point particulier $\kappa = \lambda/\xi = 1/\sqrt{2}$) a été écrit pendant sa thèse de doctorat : E. B. Bogomol'nyi, *The stability of classical solutions*, Sov. J. Nucl. Phys. **24** (4), 449-454 (1976). Plus tard, il a aussi fait des contributions très importantes dans le domaine du chaos quantique.



Références

- [1] C. Texier and G. Roux, *Physique statistique : des processus élémentaires aux phénomènes collectifs*, Dunod, Paris, second edition, 2024.
- [2] S. Sachdev, *Quantum phase transitions*, Cambridge University Press, 1999.