M1 Magistère de physique fondamentale – ENS PSay,

Option Transitions de phase – Examen

16 janvier 2026

Durée : 3h

L'utilisation de documents, calculatrices, téléphones portables,... est interdite.

Recommandations :

Consultez les informations en ANNEXE.

Lisez attentivement l'énoncé et rédigez *succinctement* et *clairement* votre réponse.

... et n'oubliez pas de vous **relire**.

1 Modèle d'Ising en champ transverse

Nous étudions un modèle d'Ising pour N spins *quantiques* sur un réseau hypercubique en dimension d de coordinence $q = 2d$. Le spin au site i est décrit par les trois matrices de Pauli

$$\sigma_i^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_i^y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_i^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

exprimée dans la base $|+\rangle_i, |-\rangle_i$ des états propres de σ_i^z. Les spins plus proches voisins interagissent via une interaction très *anisotrope* couplant seulement les composantes σ_i^z, alors que le champ magnétique est selon la direction perpendiculaire $\vec{B} = B\,\vec{u}_x$:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i^z \, \sigma_j^z - B \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^x \tag{2}$$

avec $J > 0$ et $B \in \mathbb{R}$. Par la suite on posera $k_{\mathrm{B}} = 1$ pour simplifier.

1/ Décrire l'état fondamental lorsque $B = 0$ (et $J \neq 0$). De même, quel est le fondamental lorsque $J = 0$ (et $B \neq 0$). Que peut-on dire sur l'état fondamental lorsque l'on fait varier B/J de 0 à l'∞ ?

2/ Champ moyen du modèle d'Ising à champ nul, $B = 0$ (questions de cours).

a) On note $m_z = \langle \sigma_i^z \rangle$ l'aimantation moyenne selon z. Montrer que l'approximation de champ moyen (i.e. du champ local) permet d'approximer l'hamiltonien par l'hamiltonien "de champ moyen" $H_{\mathrm{cm}} = N\,\varepsilon_0 - B_{\mathrm{loc}} \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^z$ (donner ε_0 et B_{loc}).

Indications : (i) On pourra écrire formellement $\sigma_i^z = m_z + \delta\sigma_i^z$, comme pour un spin d'Ising.
(ii) La somme sur les liens se convertit en somme sur les sites : $\sum_{\langle i,j \rangle} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \in v(i)}$, où $v(i)$ désigne les q sites plus proches voisins du site i.

b) Déduire une énergie libre par spin $f_{\mathrm{cm}}(m_z)$. (Indication : donner les v.p. de $\varepsilon_0 - B_{\mathrm{loc}}\,\sigma_i^z$).

c) Montrer que le paramètre variationnel obéit à l'équation

$$m_z = \tanh\left(m_z T_c / T\right) \tag{3}$$

Donner l'expression de T_c. Que représente T_c ? Comment appelle-t-on cette équation ?

d) Discuter (rapidement) la résolution graphique de cette équation. Montrer que le système présente une transition. Quel est l'ordre de cette transition ?

e) On note $m_z = m_*(T)$ la solution positive (ou nulle) de (3). Montrer que ses comportements limites sont $m_*(T) \simeq 1 - 2\mathrm{e}^{-2T_c/T}$ pour $T \ll T_c$ et $m_*(T) \simeq c\sqrt{(T_c - T)/T_c}$ pour $T \to T_c^-$ où l'on précisera le coefficient c. Quelle est l'origine physique du comportement de basse température ? *Tracer très très soigneusement $m_*(T)$.*

3/ On étudie le cas $\boldsymbol{\vec{B} = B\,\vec{u}_x \neq 0}$. D'après la question précédente, le nouvel hamiltonien de champ moyen est $H_{\text{cm}} = \sum_i h_i$ où $h_i = \varepsilon_0 - B_{\text{loc}}\,\sigma_i^z - B\,\sigma_i^x$ et B_{loc} le champ local selon $\vec{u}_z$ obtenu question **2/**. Écrire h_i dans la base $\{|+\rangle_i\,,\,|-\rangle_i\}$, i.e. sous forme d'une matrice 2×2. Donner les deux valeurs propres de $B_{\text{loc}}\,\sigma_i^z + B\,\sigma_i^x$ et déduire les v.p. $E_\pm$ de h_i en fonction de T_c, m_z et B.

4/ Justifier que $Z_{\text{cm}} = z_{\text{cm}}^N$ où z_{cm} est la fonction de partition pour h_i. Déduire l'énergie libre par site $f_{\text{cm}}(m_z)$ à $B \neq 0$.

5/ Montrer que le paramètre variationnel est soit $m_z = 0$ soit solution de

$$\sqrt{m_z^2 + (B/T_c)^2} = \tanh\left(\beta\sqrt{(T_c m_z)^2 + B^2}\right)\ . \tag{4}$$

Comment obtenir l'expression de $m_x = \langle\sigma_i^x\rangle$ à partir de $f_{\text{cm}}(m_z)$? Déduire que

$$m_x = \frac{B}{\sqrt{(T_c m_z)^2 + B^2}}\tanh\left(\beta\sqrt{(T_c m_z)^2 + B^2}\right)\ . \tag{5}$$

6/ Tracer $\tanh(\beta\varepsilon)$ en fonction de ε pour deux valeurs de β. Que devient la fonction si $\beta \to \infty$?

7/ **Transition de phase quantique (à $\boldsymbol{T = 0}$) :** Déduire des deux questions précédentes les deux aimantations $m_z(0,B)$ puis $m_x(0,B)$ (à $T = 0$). Tracer les deux fonctions sur un même graphe. Montrer l'existence d'une transition pilotée par B et identifier une valeur critique B_c du champ. Quel est l'ordre de cette transition ? Discuter ces solutions à la lumière de la question **1/**.

8/ **Diagramme de phase dans le demi-plan $\boldsymbol{(T,B)}$.**

a) Montrer que $m_z(T,B)$ et $m_x(T,B)$ s'expriment en fonction de B/T_c et de la fonction $m_*(T)$ étudiée à la question **2/**.*e)*.

b) Déduire la ligne dans le demi-plan (T,B) où $m_z(T,B) = 0$ et faire un dessin du diagramme de phase (identifier la région où $m_z \neq 0$ et celle où $m_z = 0$).

c) Donner l'expression de $m_x(T,B)$ dans la région où $m_z = 0$. Commenter

2 Interface métal normal-supraconducteur au point de Bogomolny

Nous étudions un supraconducteur dans le cadre de la théorie de Ginzburg-Landau. Le problème fait intervenir deux longueurs caractéristiques : la longueur de cohérence ξ et la longueur de London λ (longueur de pénétration du champ magnétique). La première contrôle les variations du paramètre d'ordre supra ψ et la seconde les variations du champ magnétique $\vec{B}$. On introduit le rapport adimensionné

$$\kappa \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda}{\xi}\ . \tag{6}$$

Dans des unités appropriées (longueurs exprimées en unité $\sqrt{2}\,\lambda$ et champ magnétique en unité du champ critique $H_c/(\sqrt{2}\,\lambda) = \Phi_0/(2\pi\lambda^2)$ où $\Phi_0 = h/(2e)$ est le quantum de flux) la fonctionnelle de Ginzburg-Landau $\boxed{\textbf{pour } \boldsymbol{T < T_c}}$ prend la forme

$$\mathcal{F}[\psi,\vec{A}\,] = \int_{\text{Vol}} \mathrm{d}^3\vec{r}\,\left\{\left|\vec{D}\psi(\vec{r}\,)\right|^2 + \kappa^2\left(1 - |\psi(\vec{r}\,)|^2\right)^2 + \frac{1}{2}\vec{B}(\vec{r}\,)^2\right\} \qquad \text{avec } \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \tag{7}$$

et $\vec{D} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\nabla} - \mathrm{i}\,\vec{A}$ la dérivée covariante. On s'intéresse à une situation où un fort champ magnétique dans une région de l'espace (pour $x \lesssim 0$) y impose l'état métallique, alors que le système est dans l'état supra pour $x \gtrsim 0$. L'objectif du problème est de décrire soigneusement l'interface.

1/ Donner l'équation du champ pour le paramètre d'ordre $\psi(\vec{r}\,)$ (complexe).

2/ Calculer le supercourant $\vec{J}_s(\vec{r}\,) = -\frac{\delta}{\delta\vec{A}(\vec{r}\,)}\int\left|\vec{D}\psi\right|^2$. On donne $\frac{\delta}{\delta\vec{A}(\vec{r}\,)}\int\vec{B}^2 = 2\vec{\nabla}\times\vec{B}$. Déduire l'équation pour le champ $\vec{A}(\vec{r}\,)$ (sous la forme d'une des équations de Maxwell).

3/ Supraconducteur de type I avec $\boldsymbol{\kappa \ll 1}$.— Les équations pour les deux champs sont deux équations différentielles nonlinéaires couplées difficiles à résoudre. Dans la limite $\lambda \ll \xi$, le champ est écranté très rapidement dans la région supra. Faisons l'approximation que $\vec{B} = 0$ pour $x > 0$ et $\psi = 0$ pour $x < 0$. En choisissant $\psi(\vec{r}) \to \psi(x) \in \mathbb{R}$, que devient l'équation du champ pour $\psi(x)$ dans la région supra ($x > 0$) ? Identifier une intégrale première de la forme $\mathscr{E} = \frac{1}{2}\big[\psi'(x)\big]^2 + U(\psi(x))$. Pour la "solution interface" ($\psi(0) = 0$ et $\psi(+\infty) = 1$), que vaut $\mathscr{E}$? Déduire la solution $\psi(x)$ correspondante. Discuter le comportement asymptotique pour $x \to +\infty$ et tracer $\psi(x)$.

4/ Supra au point de Bogomolny ($\boldsymbol{\kappa = 1/\sqrt{2}}$).— Nous étudions le cas particulier $\kappa = 1/\sqrt{2}$. Nous considérons une section $S = L_y L_z$ avec $x \in [-L, +\infty[$. Le champ $\psi(x)$ est supposé **réel** et nous écrivons le potentiel vecteur sous la forme $\vec{A}(x) = g(x)\,\vec{u}_y$ (indépendant de y et z).

a) Calculer $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ en fonction de $g(x)$. Déduire $\mathcal{F}/S$ comme une intégrale sur x faisant intervenir les deux champs **réels** $\psi(x)$ et $g(x)$.

b) Justifier qu'on peut toujours choisir $g(-L) = 0$. Montrer alors que la fonctionnelle s'écrit

$$\frac{\mathcal{F}[\psi, g\,\vec{u}_y]}{S} = \int_{-L}^{+\infty} \mathrm{d}x \left\{ \Big[\psi'(x) + g(x)\,\psi(x)\Big]^2 + \frac{1}{2}\Big[g'(x) - 1 + \psi(x)^2\Big]^2 \right\} \tag{8}$$

c) La fonctionnelle est minimisée lorsque *les deux termes quadratiques dans $\mathcal{F}$ sont nuls*. Déduire deux équations différentielles couplées pour les champs $\psi(x)$ et $g(x)$. Quelle simplification a apporté d'avoir fixé $\kappa = 1/\sqrt{2}$ (par rapport au cas général $\forall\,\kappa$) ? Interpréter une des équations en terme de $B_z(x)$. Montrer que l'on peut déduire une équation non-linéaire du second ordre pour $\psi(x)$ *seul*.

Équation de Liouville.— Pour $\psi(x) > 0$, on pose $\psi(x) = \mathrm{e}^{\varphi(x)}$. L'équation obtenue à la question précédente prend la forme de l'équation de Liouville

$$\varphi''(x) = \mathrm{e}^{2\varphi(x)} - 1 \qquad \text{qu'on étudiera sur } \mathbb{R}\,. \tag{9}$$

d) Identifier une intégrale première du mouvement $\mathscr{E}$. On introduira $V(\varphi) = \frac{1}{2} + \varphi - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\varphi}$. Étudier $V(\varphi)$ pour $\varphi \to 0$ et $\varphi \to \pm\infty$ (on demande des *comportements* limites). Tracer *très soigneusement* la fonction $V(\varphi)$.

e) Que vaut $\mathscr{E}$ pour le problème de l'interface, i.e. pour la solution telle que $\psi(-\infty) = 0$ et $\psi(+\infty) = +1$? Déduire la solution correspondante de l'équation de Liouville.

f) En revenant au champ $\psi(x)$, montrer que la solution telle que $\psi(0) = 1/2$ est donnée par

$$\int_{1/2}^{\psi(x)} \frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{y^2 - 1 - 2\ln y}} = x\,. \tag{10}$$

g) On donne les comportements limites

$$G(\psi) \overset{\text{def}}{=} \int_{1/2}^{\psi} \frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{y^2 - 1 - 2\ln y}} \simeq \begin{cases} -\sqrt{2\ln(1/\psi)} & \text{pour } \psi \to 0^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{1}{1-\psi}\right) & \text{pour } \psi \to 1^- \end{cases} \tag{11}$$

Déduire les comportements limites (pour $x \to \pm\infty$) du champ $\psi(x)$, puis du champ $B_z(x)$.

h) Ici, l'interface n'a pas une position précise mais justifier qu'elle est "proche" de $x = 0$. Tracer très soigneusement $\psi(x)$ et $B_z(x)$. Comparer la solution *exacte* pour $\kappa = 1/\sqrt{2}$ avec la solution *approchée* de la question **3/** décrivant le supra de type I pour $\kappa \ll 1$.

Annexe

- $\tanh x \simeq x - \frac{1}{3}x^3$ pour $x \to 0$ et $\tanh x \simeq 1 - 2\,\mathrm{e}^{-2x}$ pour $x \to +\infty$.
