

Università di Pisa

---

**Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali**  
**Corso di Laurea in Fisica**

Elaborato Finale

# **LA FASE DI BERRY**

**la fase geometrica  
in meccanica quantistica**

Candidato:

**Maurizio Fagotti**

Relatore:

**Chiarissimo Prof.  
Mihail Mintchev**

---

Anno Accademico 2004-2005

---



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>v</b>
<b>Premessa</b>	<b>vii</b>
<b>1 Presentazione della fase di Berry</b>	<b>1</b>
Trasporto adiabatico di una barriera di potenziale . . . . .	1
Particella a spin $1/2$ in un campo magnetico che precede . . . . .	2
<b>2 La fase di Berry</b>	<b>7</b>
La curvatura di Berry . . . . .	7
Degenerazione . . . . .	8
Interazione <i>spin - campo magnetico</i> . . . . .	9
Fattore di fase per un fotone . . . . .	10
<b>3 Generalizzazione</b>	<b>11</b>
Rimozione delle ipotesi . . . . .	11
di non degenerazione . . . . .	11
di adiabaticità . . . . .	12
di ciclicità . . . . .	13
Stati misti . . . . .	14
Esempi . . . . .	15
particella a spin $1/2$ in un campo magnetico fluttuante . . . . .	15
sistema statistico a spin $1/2$ . . . . .	17
<b>4 Esperimenti</b>	<b>19</b>
Osservazione della fase di Berry . . . . .	19
usando una fibra ottica . . . . .	19
sfruttando rivoluzioni incomplete del campo magnetico . . . . .	21

**Appendice****Matematica** **25**

Trasporto parallelo . . . . . 25

... classico . . . . . 25

... quantistico . . . . . 26

**Appendice****Fisica** **27**

Teorema adiabatico . . . . . 27

**Referenze** **29****Bibliografia** **30**

# Introduzione

*Il presente lavoro non vuole essere una trattazione esaustiva del complesso e vasto argomento della fase geometrica in meccanica quantistica: uno studio approfondito della fase di Berry richiederebbe l'utilizzo (e la comprensione) di delicati strumenti matematici. Nonostante abbia cercato di evitare un rigore a volte necessario, ho ritenuto comunque opportuno fare cenno alle caratteristiche principali di un aspetto che, nella prima apparizione in un articolo di Berry, ha sorpreso per il fatto di essere stato trascurato così a lungo.*

*Ho deciso di iniziare la tesi con la descrizione dell'effetto Aharonov-Bohm. Più di venti anni prima della scoperta della fase geometrica in M.Q., Aharonov e Bohm mostrarono che, mentre in fisica classica i campi hanno un ruolo privilegiato, in meccanica quantistica i potenziali sembrano assumere maggiore importanza; una reinterpretazione del fenomeno in termini geometrici ha legato tale effetto alla variazione di fase geometrica. Dopo una breve deduzione della fase in regime adiabatico ho presentato un primo problema in cui, ricorrendo alla formula ricavata in precedenza, ho calcolato la fase geometrica acquistata dal sistema; e un secondo, dove ho effettuato un calcolo esplicito della fase (anticipando qualcosa) senza l'ipotesi di adiabaticità. A questo punto ho reputato indispensabile la trattazione teorica che fino a quel momento avevo evitato: ho dedotto la curvatura di Berry e risolto l'ambiguità dovuta alla degenerazione. Prima di passare alla rassegna di alcune verifiche sperimentali, per evitare mancanza di organicità, ho deciso di aggiungere, in modo abbastanza sintetico, le generalizzazioni che, negli anni successivi alla scoperta, hanno reso la fase geometrica un argomento di interesse globale.*

*Maurizio Fagotti*



# Premessa

## L'effetto Aharonov-Bohm

Consideriamo la regione di spazio esterna ad un cilindro di raggio  $\rho$  (e altezza lungo  $\hat{z}$ ) nel quale si trova un campo magnetico costante  $\vec{B} = B\hat{z}$  (ad esempio generato da un solenoide di "grande" lunghezza). Immaginiamo di confinare un elettrone nella regione esterna al cilindro. Il campo magnetico nella zona permessa è nullo, e ciò spingerebbe a pensare che lo spettro energetico non venga influenzato da  $\vec{B}$ : la falsità di questa congettura è in sostanza l'*effetto Aharonov-Bohm*. Mi accingo ora a risolvere l'equazione di Schrödinger in assenza e in presenza di  $\vec{B}$ .

L'Hamiltoniana del sistema è

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \left( \nabla - \frac{ie}{\hbar c} \vec{A} \right)^2$$

dove  $\vec{A}$  è il potenziale vettore. Nella *gauge di Coulomb* ( $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ ) il potenziale vettore assume la forma (in coordinate cilindriche  $r, z, \phi$ )

$$\vec{A} = \left( \frac{B\rho^2}{2r} \right) \hat{\phi}$$

e l'Hamiltoniana può essere scritta (d'ora in poi utilizzerò le unità naturali<sup>1</sup>)

$$\mathbf{H}_B = -\frac{1}{2m_e} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - ie \frac{B\rho^2}{2} \right)^2 \right]$$

É comunque utile pensare l'Hamiltoniana come quella di una particella libera nella rappresentazione  $x_B$  in cui il momento meccanico è  $(-i\nabla - e\vec{A})$ .

$$\mathbf{H}_B |N\rangle \rightarrow \langle x_B | \mathbf{H}_0 |N\rangle$$

Data la simmetria del problema, caratterizzo gli autostati con i numeri quantici  $E$ ,  $P_z$  e  $L_z$  autovallori degli operatori  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{P}_z$  e  $\mathbf{L}_z$

$$\langle x_B | \mathbf{H}_0 |E, P_z, L_z\rangle = E \langle x_B |E, P_z, L_z\rangle$$

---

<sup>1</sup> $\hbar = c = 1$

Essendo<sup>2</sup>  $\mathbf{L}_z = -i\frac{\partial}{\partial\phi} - e\frac{B\rho^2}{2}$  osservo<sup>3</sup>

$$\langle x_0 | \mathbf{H}_B | E, P_z, L_z - e\frac{B\rho^2}{2} \rangle = E \langle x_0 | E, P_z, L_z - e\frac{B\rho^2}{2} \rangle$$

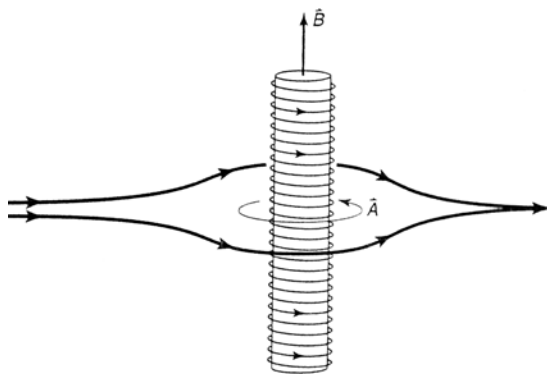
ovvero gli autostati di  $\mathbf{H}_B$  non sono altro che gli autostati di  $\mathbf{H}_0$  a meno di sostituire  $L_z$  con  $L_z - e\frac{B\rho^2}{2}$ . Un discorso analogo vale per  $\mathbf{P}_z$ , e ciò mi permette di scrivere

$$\langle x_B | E, P_z, L_z \rangle = \langle x_0 | E, P_z, L_z - \frac{eB\rho^2}{2} \rangle = e^{-ie\frac{B\rho^2}{2}\phi} \langle x_0 | E, P_z, L_z \rangle = e^{-\frac{ie}{2\pi}\Phi_B\phi} \langle x_0 | E, P_z, L_z \rangle \quad (1)$$

Un fascio di elettroni, nel caso in cui  $B = 0$ , non risente di alcuna interazione e, convenendo di rappresentare la particella libera con un'onda piana, quest'ultima non subisce alcun cambiamento nella forma asintotica nel passaggio vicino al cilindro:

$$e^{ikx} \longrightarrow e^{ikx} \quad (2)$$

Se però è presente il campo  $B \neq 0$  il passaggio dell'elettrone sopra o sotto il cilindro produce un'interferenza



$$\begin{aligned} e^{ikx} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sum_N c_N(B) \langle x_B | N \rangle = \lim_{\phi \rightarrow \{0, 2\pi\}} \sum_N c_N(B) e^{-\frac{ie}{2\pi}\Phi_B\phi} \langle x_0 | N \rangle = \sum_N c_N(0) \langle x_0 | N \rangle \\ &\implies c_N(B) = \{1, e^{ie\Phi_B}\} c_N(0) \end{aligned}$$

dove  $\{a, b\} \equiv \{a \text{ se } y < -\rho; b \text{ se } y > \rho\}$ ,  $\sum_N c_N(B) |N\rangle_B$  è la funzione d'onda della particella, e il terzo uguale discende dalla (2).

$$\langle x | \text{particle} \rangle = \sum_N c_N(0) \left[ \theta(\rho - y) + e^{ie\Phi_B} \theta(\rho + y) \right] \langle x_B | N \rangle$$

<sup>2</sup>in presenza di un campo magnetico la vera quantità fisica è il momento dell'impulso meccanico  $\vec{\mathbf{p}} - e\vec{\mathbf{A}}$

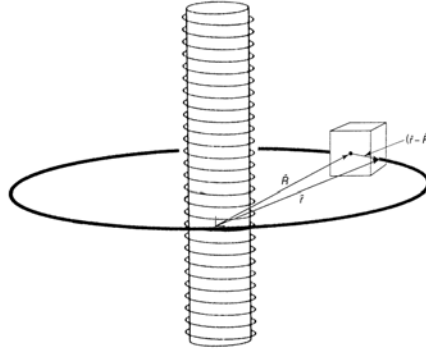
<sup>3</sup>faccio agire l'operatore  $\mathbf{H}_B$  sugli autostati di  $\mathbf{H}_0$

Facendo il limite per  $x \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \langle x | \text{particle} \rangle &= \lim_{\phi \rightarrow \pi} \sum_N c_N(0) \left[ \theta(\rho - y) + e^{ie\Phi_B} \theta(\rho + y) \right] e^{-\frac{ie}{\hbar} \Phi_B \phi} \langle x_0 | N \rangle = \\ &= \left[ \theta(\rho - y) e^{-ie\frac{\Phi_B}{2}} + \theta(\rho + y) e^{ie\frac{\Phi_B}{2}} \right] e^{ikx} \end{aligned}$$

il che mostra come una particella che percorre una traiettoria sotto al cilindro risulta sfasata di  $e\Phi_B$  rispetto a una particella che percorre una traiettoria sopra lo stesso.

Un discorso analogo si può fare considerando l'elettrone confinato da un potenziale  $V(\vec{r} - \vec{R})$  in una scatola centrata in  $\vec{R}(t)$  fuori dal solenoide. La dipendenza di  $\vec{R}$  dal tempo è stata introdotta perché ho intenzione di trasportare la scatola intorno al solenoide. Se il trasporto è "abbastanza" lento posso considerare il processo adiabatico, di modo che se la particella al tempo zero si trova nell' $n$ -esimo autostato, durante l'evoluzione rimane nell' $n$ -esimo autostato (*teorema adiabatico*).



Per semplificare considero il processo  $\vec{R}(t) = U_z(\omega t) \vec{R}$  dove  $U_z$  è la matrice di rotazione intorno all'asse  $z$  con velocità angolare  $\omega$ . Osservo che se  $\psi(r, z, \phi, t)$  è la funzione d'onda al tempo  $t$

$$\psi_E(r, z, \phi, \frac{2\pi}{\omega}) = e^{-iEt} \psi_E(r, z, \phi - 2\pi, 0)$$

in quanto la funzione d'onda non cambia nel sistema di riferimento che ruota con  $\vec{R}$ .

$$\begin{aligned} \psi_E(r, z, \phi, \frac{2\pi}{\omega})_B &= e^{-i\frac{2\pi E}{\omega}} \psi_E(r, z, \phi - 2\pi, 0)_B = e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{2\pi E}{\omega}} \sum_N a_N^{(E)} \langle x_B | N_{(\phi-2\pi)} \rangle = \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{2\pi E}{\omega}} \sum_N a_N^{(E)} e^{-\frac{ie}{\hbar c} \Phi_B(\phi-2\pi)} \langle x_0 | N_{(\phi-2\pi)} \rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{2\pi E}{\omega}} \sum_N a_N^{(E)} e^{-\frac{ie}{\hbar} \Phi_B(\phi-2\pi)} \langle x_0 | N_{(\phi)} \rangle = \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{2\pi E}{\omega}} \sum_N a_N^{(E)} e^{-\frac{ie}{\hbar c} \Phi_B(\phi-2\pi)} e^{\frac{ie}{\hbar c} \Phi_B \phi} \langle x_B | N \rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{2\pi E}{\omega}} e^{\frac{ie}{\hbar c} \Phi_B} \psi_E(r, z, \phi, 0)_B \end{aligned}$$

In un giro intorno al solenoide la funzione d'onda acquista la fase  $e\Phi_B$ .

## La fase geometrica

Il risultato ottenuto nella precedente sezione può essere generalizzato imponendo che in una trasformazione adiabatica, oltre alla consueta *fase dinamica*, la funzione d'onda acquisti una *fase* ( $e\Phi_B$  nel caso precedente) che dipenda esclusivamente dalla geometria del sistema. Indicando tale fase con  $\gamma$ , risulta che in un processo adiabatico al primo ordine in  $\frac{\partial}{\partial t} \langle x | n_t \rangle$  ( $\epsilon$  è il parametro di un opportuno sviluppo<sup>4</sup>)

$$\psi(n_t) = e^{-i \int_0^t E_n(\tau) d\tau} e^{i\gamma_n} \langle x | n_t \rangle + \epsilon \sum_{m \neq n} c_m(t) \langle x | m_t \rangle$$

dove  $|n_t\rangle$  e  $\psi(n_t)$  rappresentano rispettivamente l'autostato (non degenere) e la funzione d'onda al tempo  $t$ . Scrivendo esplicitamente l'equazione di Schrödinger

$$\begin{aligned} E_n(t) &= \langle \psi_{n_t} | \mathbf{H} | \psi_{n_t} \rangle = \langle \psi_{n_t} | i \frac{\partial}{\partial t} | \psi_{n_t} \rangle = i \left[ -i E_n(t) + i \dot{\gamma}_n + \langle n_t | \frac{\partial}{\partial t} | n_t \rangle + o(\epsilon^2) \right] \\ \implies \dot{\gamma}_n &= \langle n_t | i \frac{\partial}{\partial t} | n_t \rangle \quad (+o(\epsilon^2)) \end{aligned} \quad (3)$$

e  $\gamma_n$  può essere determinata integrando. L'integrazione sul tempo nasconde in parte la natura topologica di  $\gamma$ . Per mettere in luce tale aspetto, è sufficiente parametrizzare l'evoluzione dell'Hamiltoniana con la curva  $\vec{R}$ , in modo che

$$\frac{\partial}{\partial t} = \dot{\vec{R}} \cdot \nabla_{\vec{R}}$$

La fase  $\gamma$  può essere scritta, considerando un'evoluzione ciclica

$$\gamma_n = i \oint_C \langle n_{\vec{R}} | \nabla_{\vec{R}} n(\vec{R}) \rangle \cdot d\vec{R} \quad (4)$$

manifestando il suo carattere puramente geometrico.

Dal momento che nel caso di non degenerazione (finora trattato) gli autostati sono definiti a meno di una fase, è interessante vedere come varia  $\langle n | \nabla_{\vec{R}} n \rangle$  per la trasformazione locale  $|n\rangle \rightarrow e^{i\theta(\vec{R})} |n\rangle$

$$\langle n | \nabla_{\vec{R}} n \rangle \longrightarrow \langle n | \nabla_{\vec{R}} n \rangle + i \nabla_{\vec{R}} \theta(\vec{R}) \quad (5)$$

ovvero  $-i \langle n | \nabla_{\vec{R}} n \rangle$  (chiamato *connessione di Berry*<sup>5</sup>) trasforma come il potenziale vettore di un campo elettromagnetico, ovvero come un campo di gauge.

<sup>4</sup>vedi Appendice Fisica

<sup>5</sup>la denominazione risulterebbe chiara trattando il problema da un punto di vista matematico

---

Non deve trarre in inganno il fatto che quanto detto si riferisca a fasi che, in quanto tali, si potrebbe pensare non essere osservabili. Quello che genera confusione è che l'affermazione la fase non è osservabile necessita di maggiore precisione. A titolo di esempio si può immaginare di dividere un fascio di particelle in due, in modo che solo una parte attraversi un potenziale che varia adiabaticamente. Una volta ricombinato in un unico fascio, la funzione d'onda<sup>6</sup> avrà la forma

$$\Psi \sim \frac{1}{2}\Psi_0 + \frac{1}{2}\Psi_0 e^{i\Gamma}$$

dove  $\Gamma$  è la fase extra acquistata dalla parte del fascio che ha interagito col campo. Si verifica allora banalmente

$$|\Psi|^2 \sim |\Psi_0|^2 \cos^2\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$$

ovvero è possibile risalire alla fase  $\Gamma$  studiando i punti d'interferenza costruttiva e distruttiva.

---

<sup>6</sup>assumendo che lo stato resti puro



# 1 Presentazione della fase di Berry

La fase geometrica  $\gamma$  è comunemente detta *fase di Berry*, essendo stato Berry il primo ad averla individuata considerando sistemi che evolvono in modo adiabatico. Provo ora a mostrare come la (4) possa semplificare a dismisura la risoluzione di problemi quali l'effetto Aharonov-Bohm.

## Trasporto adiabatico di una barriera di potenziale

Trasportare una barriera di potenziale in un campo magnetico omogeneo [2] “genera” una fase di Berry non nulla. L'Hamiltoniana del sistema può essere scritta

$$\mathbf{H} = \frac{(i\nabla + e\vec{\mathbf{A}})^2}{2m} + V(\vec{\mathbf{r}})$$

Trasportare il potenziale equivale a fare una traslazione spaziale del sistema e, in presenza di un campo magnetico, questa si traduce [4] nell'applicazione dell'operatore

$$[\vec{\mathbf{a}}] = e^{-i\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{p}}} \equiv e^{-i\vec{\mathbf{a}} \cdot (\vec{\mathbf{p}}_0 + e\vec{\mathbf{A}})}$$

dove  $\vec{\mathbf{p}}_0 = -i\nabla$ . L'operatore così definito opera infatti una traslazione spaziale del potenziale e, scegliendo<sup>1</sup>  $\vec{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{r}}$ , lascia immutata l'energia cinetica.

L'Hamiltoniana in funzione dello spostamento  $\vec{\mathbf{a}}$  assume la forma

$$\mathbf{H}_{\vec{\mathbf{a}}} = [\vec{\mathbf{a}}]\mathbf{H}[\vec{\mathbf{a}}]^\dagger = \mathbf{H} - V(\vec{\mathbf{r}}) + V(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{a}})$$

da cui segue

$$\mathbf{H}|N\rangle = E|N\rangle \implies \mathbf{H}_{\vec{\mathbf{a}}}[\vec{\mathbf{a}}]|N\rangle = E[\vec{\mathbf{a}}]|N\rangle$$

Per calcolare la fase di Berry utilizzo l'equazione (3) e ricavo<sup>2</sup>

$$\nabla_{\vec{\mathbf{a}}}\gamma = i\langle N|[\vec{\mathbf{a}}]^\dagger \nabla_{\vec{\mathbf{a}}}[\vec{\mathbf{a}}]|N\rangle = i\langle N|\exp \overline{i\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{p}}}(\nabla_{\vec{\mathbf{a}}})|N\rangle$$

$$\overline{\mathbf{A}}(\mathbf{B}) \stackrel{def}{=} [\mathbf{A}, \mathbf{B}]$$

<sup>1</sup>la fase geometrica è invariante di gauge, nonostante utilizzi un procedimento *non invariante*

<sup>2</sup>utilizzo la formula nota  $e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2}[A, [A, B]] + \dots$

Scrivendo esplicitamente l'esponenziale si ottiene

$$\exp \overline{i\vec{a} \cdot (\vec{p}_0 + e\vec{A})} (\nabla_{\vec{a}}) = \sum_n \frac{1}{n!} \overline{i\vec{a} \cdot \vec{p}}^n (\nabla_{\vec{a}})$$

e, esprimendo i primi due termini dello sviluppo

$$\exp \overline{i\vec{a} \cdot \vec{p}} (\nabla_{\vec{a}}) = \nabla_{\vec{a}} - i\vec{p} + \sum_n \frac{1}{(n+2)!} \overline{i\vec{a} \cdot \vec{p}}^n (ie\vec{a} \times \vec{B})$$

Osservo ora che  $\vec{a} \times \vec{B}$  non dipende da  $\vec{p}_0$  e che quindi posso tranquillamente sostituire

$$\overline{i\vec{a} \cdot \vec{p}} \rightarrow \overline{i\vec{a} \cdot \vec{p}_0}$$

ottenendo

$$\exp \overline{i\vec{a} \cdot \vec{p}} (\nabla_{\vec{a}}) = \nabla_{\vec{a}} - i\vec{p} + \sum_n \frac{1}{(n+2)!} \overline{i\vec{a} \cdot \vec{p}_0}^n (ie\vec{a} \times \vec{B})$$

Poiché  $|N\rangle$  non dipende da  $\vec{a}$  posso semplificare  $\nabla_{\vec{a}}$ . Considerando che per calcolare la fase di Berry integro su una traiettoria chiusa, il termine in  $\vec{p}$  scompare; dal momento che  $\vec{B}$  è costante, posso inoltre prendere solo il primo termine della serie. In definitiva

$$\nabla_{\vec{a}} \gamma = i \left\langle N \left| \frac{1}{2} ie\vec{a} \times \vec{B} \right| N \right\rangle$$

La fase di Berry può essere ora calcolata senza difficoltà integrandoci<sup>3</sup>

$$\gamma = i \left\langle N \left| \frac{1}{2} ie \iint_S \text{rot}' (\vec{a} \times \vec{B}) \right| N \right\rangle = e \left\langle N \left| \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right| N \right\rangle = e\Phi_C(\vec{B})$$

## Particella a spin 1/2 in un campo magnetico che precede

Consideriamo una particella soggetto a un campo magnetico di modulo costante  $B = \omega_L/(2\mu)$  che<sup>4</sup> precede intorno all'asse  $\hat{z}$  con velocità angolare  $\omega$  anch'essa costante. L'Hamiltoniana del sistema è della forma

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \omega_L \hat{n}(t) \cdot \vec{\sigma} = \frac{1}{2} \omega_L \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)e^{-i\omega t} \\ \sin(\theta)e^{i\omega t} & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Data la semplicità del problema, è possibile risolvere esattamente l'equazione di Schrödinger (in unità naturali)

$$\mathbf{H} |\Psi\rangle = i\partial_t |\Psi\rangle$$

<sup>3</sup>l'apice sul rotore sta ad indicare che le derivate sono fatte rispetto al parametro  $\vec{a}$

<sup>4</sup> $\omega_L$  è la frequenza di Larmor e  $\mu$  il momento magnetico

Osservo subito

$$\mathbf{H}(t) = E_\omega \mathbf{H}_0 E_\omega^\dagger$$

dove  $E_\omega$  è la matrice unitaria

$$E_\omega \equiv e^{-\frac{1}{2}i\omega t \sigma_z} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}i\omega t} \end{pmatrix}$$

L'equazione di Schrödinger può essere allora scritta

$$E_\omega \mathbf{H}_0 E_\omega^\dagger \Psi = i\dot{\Psi}$$

ovvero moltiplicando ambo i membri per  $E_\omega^\dagger$

$$\mathbf{H}_0 E_\omega^\dagger \Psi = iE_\omega^\dagger \dot{\Psi} = i\partial_t (E_\omega^\dagger \Psi) - iE_\omega^\dagger \dot{\Psi}$$

Definendo  $\Phi = E_\omega^\dagger \Psi$  si ottiene

$$\mathbf{H}_0 \Phi = i\dot{\Phi} - iE_\omega^\dagger \dot{E}_\omega \Phi = i\dot{\Phi} + \frac{1}{2}\omega \sigma_z \Phi$$

e si perviene alla semplice<sup>5</sup> equazione differenziale

$$\tilde{\mathbf{H}}\Phi \equiv \left( \mathbf{H}_0 - \frac{1}{2}\omega \sigma_z \right) \Phi = i\dot{\Phi}$$

che, posto  $\vec{S} \equiv 2\mu\vec{B} - \vec{\omega}$ , è risolta da

$$\Phi = \left[ \cos\left(\frac{1}{2}St\right) \mathbf{I} - \frac{2}{S}i \sin\left(\frac{1}{2}St\right) \left( \mathbf{H}_0 - \frac{1}{2}\omega \sigma_z \right) \right] \Phi_0$$

ovvero

$$\Psi = E_\omega \left[ \cos\left(\frac{1}{2}St\right) \mathbf{I} - \frac{2}{S}i \sin\left(\frac{1}{2}St\right) \left( \mathbf{H}_0 - \frac{1}{2}\omega \sigma_z \right) \right] \Psi_0$$

Sfruttando la (4) avrei potuto calcolare rapidamente la fase di Berry considerando un'evoluzione adiabatica del sistema, ho preferito risolvere il problema esattamente per mettere in luce che la fase geometrica non si manifesta soltanto sotto le ipotesi di Berry. Con un po' di algebra si può calcolare la fase dinamica (definita come l'opposto dell'integrale del valor medio dell'energia<sup>6</sup>)

$$-\int_0^t \langle E \rangle(\tau) d\tau = -\langle E \rangle_0 t - \frac{2\mu |\vec{\omega} \times \vec{B}|}{2S^2} \times \\ \times \left\{ (1 - \cos(St)) \langle \sigma_y \rangle - \left( t - \frac{\sin(St)}{S} \right) [\omega_L \sin \theta \langle \sigma_z \rangle + (\omega - \omega_L \cos \theta) \langle \sigma_x \rangle] \right\} \quad (1.2)$$

<sup>5</sup> $\tilde{\mathbf{H}}$  non dipende dal tempo e oltretutto  $\tilde{\mathbf{H}}^2$  è multiplo dell'identità

<sup>6</sup>in seguito spiegherò perché è definita in questo modo

Perché abbia senso parlare di fase<sup>7</sup> gli stati di partenza e di arrivo devono essere uguali, ovvero lo stato iniziale deve essere autostato dell'operatore di evoluzione temporale al tempo  $t$

$$\mathbf{U}(t) = E_\omega \left[ \cos\left(\frac{1}{2}St\right) \mathbf{I} - \frac{2}{S} i \sin\left(\frac{1}{2}St\right) \left( \mathbf{H}_0 - \frac{1}{2}\omega \sigma_z \right) \right] \quad (1.3)$$

e la fase geometrica risulta essere la differenza tra la fase totale  $\theta$  e la fase dinamica<sup>8</sup>

$$\gamma(t) = \theta(t) + \int_0^t \langle E \rangle(t) d\tau$$

Questo nuovo approccio mostra come l'ipotesi di ciclicità dell'hamiltoniana non sia poi così necessaria: la funzione d'onda caratterizza completamente lo stato e quindi anche la geometria del sistema.

Limitandoci al caso adiabatico, ovvero all'ordine 0 in  $\omega$  (ma non trascurando ad esempio  $\omega t$ )

$$\mathbf{U}(t) \longrightarrow E_\omega \left[ \cos\left(\frac{1}{2}St\right) \mathbf{I} - \frac{2}{\omega_L} i \sin\left(\frac{1}{2}St\right) \mathbf{H}_0 \right]$$

e dopo un periodo

$$\mathbf{U}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) \longrightarrow - \left[ \cos\left(\frac{\pi S}{\omega}t\right) \mathbf{I} - \frac{2}{\omega_L} i \sin\left(\frac{\pi S}{\omega}t\right) \mathbf{H}_0 \right]$$

ovvero, considerando l'evoluzione degli autostati

$$\mathbf{U}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) \longrightarrow - \exp\left(\mp i \frac{\pi S}{\omega}\right)$$

Approssimando la fase dinamica  $\delta$  all'ordine  $\omega t$ , si perviene all'equazione

$$\delta = - \langle E \rangle_0 t \quad (1.4)$$

e la fase geometrica, calcolata come differenza tra la totale e la dinamica, tende a

$$\mp \frac{\pi S}{\omega} \mp \pi \pm \frac{\pi \omega_L}{\omega}$$

ed esplicitando

$$\gamma \longrightarrow \mp \pi (1 - \cos \theta) = \mp \frac{1}{2} \Omega \quad (1.5)$$

dove ho indicato con  $\Omega$  l'angolo solido spazzato dallo spin in un periodo.

In questo semplice ma illuminante problema, partendo dall'espressione dell'operatore di evoluzione temporale (1.3), è possibile calcolare in generale la fase geometrica del sistema. Dopo un periodo  $E_\omega = -1$  ed è sufficiente preparare lo stato iniziale in modo che questo sia autostato di  $\tilde{\mathbf{H}}$

<sup>7</sup>dando a *fase* il significato più intuitivo

<sup>8</sup>per ora mi limito ad osservare che questa definizione è coerente con la deduzione della fase geometrica in regime adiabatico

perché, alla fine del ciclo, il sistema ritorni come in origine. Gli stati che evolvono ciclicamente sono

$$|\Psi_C^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2S}} \left( \pm \frac{\omega_L \sin \theta}{\sqrt{S \pm \omega \mp \omega_L \cos \theta}} \right)$$

e l' operatore di evoluzione temporale, in questa base si scrive

$$\mathbf{U}(t) = E_S \left[ \cos\left(\frac{1}{2}\omega t\right) \mathbf{I} - \frac{2}{S} i \sin\left(\frac{1}{2}\omega t\right) \left( \mathbf{H}_0 - \frac{1}{2}\omega \sigma_z \right) \right] \quad (1.6)$$

che, dopo un ciclo dell'hamiltoniana ( $t = 2\pi/\omega$ ), si riduce a  $-E_S$ . Lo stato acquista la fase totale

$$\mp \frac{\pi S}{\omega} \mp \pi$$

e<sup>9</sup> la fase geometrica può essere calcolata sottraendole la fase dinamica (1.2). Dalla (1.3) o dalla (1.6) si vede che la periodicità dell'hamiltoniana (almeno in regime adiabatico) si traduce in una periodicità di qualche stato, ma non è vero il viceversa: gli stati che, ad esempio, al tempo 0 hanno  $s_z$  definito, al tempo  $2\pi/S$  ritornano nello stato originale acquistando la fase<sup>10</sup>

$$\mp \frac{\pi \omega}{S} \mp \pi$$

Quelle considerate sono solo le evoluzioni periodiche più evidenti: come detto precedentemente, gli autovettori della matrice associata a  $\mathbf{U}(t)$  al tempo  $\tau$  rappresentano stati che evolvono ciclicamente nel periodo  $[0, \tau]$ .

<sup>9</sup>come si vede il risultato trovato in regime adiabatico è ancora valido

<sup>10</sup>l'osservazione risulta evidente confrontando le rappresentazioni (1.3) e (1.6) dell'operatore di evoluzione temporale



## 2 La fase di Berry

### La curvatura di Berry

Nell'esempio della barriera di potenziale trasportata in un campo costante (pag. 2), dal momento che il parametro  $\vec{d}$  è tridimensionale, ho fatto uso del teorema di Stokes per trasformare l'integrale (4) in un integrale di superficie. Nel caso in cui lo spazio dei parametri ha dimensione più alta il teorema non può essere applicato, o meglio, si deve utilizzare il teorema nella forma più generale:

$$\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S d\mathbf{S} \cdot (d\mathbf{R} \wedge \mathbf{a})$$

dove con  $d\mathbf{R}$  ho indicato la derivata rispetto al parametro.

La formula (4) può essere generalizzata

$$\gamma_n = i \iint_S d\mathbf{S} \cdot (d\mathbf{R} \wedge \langle n | d\mathbf{R} n \rangle) = -\Im \iint_S d\mathbf{S} \cdot (d\mathbf{R} \wedge \langle n | d\mathbf{R} n \rangle) \quad (2.1)$$

infatti, poiché  $|n\rangle$  è normalizzato

$$\begin{aligned} 1 - \langle n | n \rangle = 0 &\implies d\mathbf{R}[1 - \langle n | n \rangle] = 0 \implies d\mathbf{R} \langle n | n \rangle = 0 \\ &\implies i \langle n | d\mathbf{R} n \rangle \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Utilizzando le proprietà del prodotto esterno

$$\gamma_n = -\Im \iint_S d\mathbf{S} \cdot (\langle d\mathbf{R} n | \wedge | d\mathbf{R} n \rangle) = -\Im \iint_S d\mathbf{S} \cdot \sum_m \langle d\mathbf{R} n | m \rangle \wedge \langle m | d\mathbf{R} n \rangle$$

Dal momento che  $\langle n | d\mathbf{R} n \rangle$  è immaginario, il termine della somma con  $m = n$  non dà contributo e può essere omissso. L'esclusione del termine è provvidenziale poiché, dall'equazione di Schrödinger

$$0 = \langle m | d\mathbf{R} (\mathbf{H} | n \rangle - E_n | n \rangle) \implies \langle m | d\mathbf{R} \mathbf{H} | n \rangle + \langle m | d\mathbf{R} n \rangle (E_m - E_n) = \delta_{mn} d\mathbf{R} E_n$$

e, se<sup>1</sup>  $m \neq n$

$$\langle m | d\mathbf{R} n \rangle = \frac{\langle m | d\mathbf{R} \mathbf{H} | n \rangle}{E_n - E_m}$$

---

<sup>1</sup>se  $m = n$  si ottiene il *teorema di Hellmann-Feynman*

e  $\gamma_n$  può essere scritto come l'opposto dell'integrale di superficie di

$$\mathbf{\Omega} \equiv \Im \sum_{m \neq n} \frac{\langle n | d_{\mathbf{R}} \mathbf{H} | m \rangle \wedge \langle m | d_{\mathbf{R}} \mathbf{H} | n \rangle}{(E_n - E_m)^2} \quad (2.2)$$

Il risultato ottenuto risolve il problema dovuto alla dipendenza della fase di Berry da  $|\mathbf{q}\mathbf{n}\rangle$ . L'esistenza del ket necessita infatti di una base localmente monodroma mentre, scritto così,  $\mathbf{\Omega}$  non richiede nessuna particolare accortezza nella scelta della base.

### • Degenerazione

L'equazione (2.2), per essere accettabile, dovrebbe avere il denominatore  $E_n - E_m$  diverso da 0 per tutti gli  $m$ . Quando ciò non accade, ovvero quando si è in presenza di una degenerazione,  $\mathbf{\Omega}$  diverge; nonostante tutto non è il caso di parlare di *patologia*. Per mostrare che la fase di Berry risulta ancora calcolabile, mi limito al caso tridimensionale in cui per un certo  $\tilde{\mathbf{R}}$ ,  $E_{\tilde{n}}(\tilde{\mathbf{R}}) = E_n(\tilde{\mathbf{R}})$ . Posso pensare l'hamiltoniana come composta di due termini di cui uno accoppia unicamente gli stati  $|n\rangle$  e  $|\tilde{n}\rangle$ . Se chiamo quest'ultimo operatore  $\mathbf{H}^{(n,\tilde{n})}$  e faccio una traslazione dello spettro energetico in modo che  $E_n(\tilde{\mathbf{R}}) = E_{\tilde{n}}(\tilde{\mathbf{R}}) = 0$ , posso decidere di parametrizzare  $\mathbf{H}^{(n,\tilde{n})}$  in modo che sia

$$\mathbf{H}^{(n,\tilde{n})} = \mathbf{R} \cdot \vec{\sigma} \quad (2.3)$$

ottenendo, dalla (2.2)

$$\mathbf{\Omega} = \Im \sum_{m \neq n, \tilde{n}} \frac{\langle n | \nabla_{\mathbf{R}} \mathbf{H} | m \rangle \times \langle m | \nabla_{\mathbf{R}} \mathbf{H} | n \rangle}{(E_n - E_m)^2} + \Im \frac{\langle n | \vec{\sigma} | \tilde{n} \rangle \times \langle \tilde{n} | \vec{\sigma} | n \rangle}{R^2} \quad (2.4)$$

con degenerazione in  $R = 0$ . Si può vedere facilmente che gli autovettori normalizzati di  $\mathbf{H}^{(n,\tilde{n})}$  sono

$$|n_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2R^2 \mp 2R R_3}} \begin{pmatrix} X + iY \\ \pm R - Z \end{pmatrix}$$

Interpretando il secondo termine della (2.4) come la *curvatura di Berry* dell'hamiltoniana (2.3), calcolo esplicitamente la *connessione di Berry* e utilizzo l'equazione (2.1) per valutare  $\mathbf{\Omega}$ . Dal momento che la connessione è reale (come precedentemente dimostrato), nel derivare mi posso dimenticare della normalizzazione<sup>2</sup>, ricavando senza difficoltà

$$\langle n_{\pm} | \nabla_{\mathbf{R}} n_{\pm} \rangle = \frac{1}{2R(R \mp R_3)} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

<sup>2</sup>Se indico con  $N$  la normalizzazione e  $\vec{v}$  l'autovettore

$$\Im \frac{1}{N} \vec{v}^{\dagger} \nabla \left( \frac{1}{N} \vec{v} \right) = \Im \left\{ -\frac{\nabla N}{N^3} + \frac{1}{N^2} \vec{v}^{\dagger} \cdot (\nabla \vec{v}) \right\} = \frac{1}{N^2} \Im \vec{v}^{\dagger} \cdot (\nabla \vec{v})$$

ovvero (a seconda che  $E_n(\vec{R}_{(0)}) \gtrless E_{\tilde{n}}(\vec{R}_{(0)})$ )

$$\Omega^{(n,\tilde{n})} = \pm \frac{\vec{R}}{2R^3}$$

$$\Omega = \mathfrak{I} \sum_{m \neq n, \tilde{n}} \frac{\langle n | \nabla_{\mathbf{R}} \mathbf{H} | m \rangle \times \langle m | \nabla_{\mathbf{R}} \mathbf{H} | n \rangle}{(E_n - E_m)^2} \pm \frac{\vec{R}}{2R^3}$$

Il risultato ottenuto mostra che, se per ogni degenerazione l'hamiltoniana viene scomposta in modo che solo un termine tenga conto di questa, il contributo alla fase geometrica di ogni degenerazione risulta

$$\iint_S \mp \frac{\vec{R}}{2R^3} \cdot d\mathbf{S} = \mp \frac{1}{2} \Omega(C)$$

avendo indicato con  $\Omega(C)$  l'angolo solido sotteso (rispetto al punto di degenerazione) dal sostegno della curva percorsa dai parametri scelti in modo che l'hamiltoniana ridotta agli stati coinvolti nella degenerazione sia della forma (2.3).

## Interazione spin - campo magnetico

Mi accingo ora a generalizzare i risultati precedenti, considerando un'Hamiltoniana della forma

$$\mathbf{H} = \vec{H} \cdot \mathbf{s}$$

dove con  $\mathbf{s}$  ho indicato l'operatore di spin e con  $\vec{H}$  un vettore proporzionale al campo magnetico. Variando lentamente il campo, lo stato del sistema subisce una variazione della fase geometrica. Mi limito al caso in cui il sistema si trova nell'autostato  $|n; s\rangle$ . Essendo l'energia pari a

$$E_n = nH$$

la curvatura di Berry risulta essere

$$\Omega = \frac{1}{H^2} \mathfrak{I} \sum_{m \neq n} \frac{\langle n; s | \mathbf{s} | m; s \rangle \times \langle m; s | \mathbf{s} | n; s \rangle}{(m - n)^2}$$

Ricordando gli elementi di matrice degli operatori  $\mathbf{s}_x$ ,  $\mathbf{s}_y$  e  $\mathbf{s}_z$  (suppongo l'asse  $\hat{z}$  diretto lungo il campo magnetico)

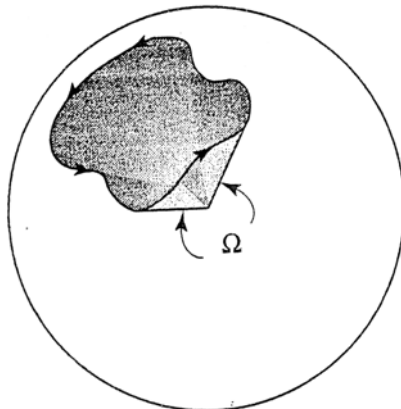
$$\begin{cases} \mathbf{s}_x^{(n \pm 1, n)} \equiv \langle n \pm 1; s | \mathbf{s}_x | n; s \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{s(s+1) - n(n \pm 1)} \\ \mathbf{s}_y^{(n \pm 1, n)} \equiv \langle n \pm 1; s | \mathbf{s}_y | n; s \rangle = \mp \frac{1}{2} i \sqrt{s(s+1) - n(n \pm 1)} \\ \mathbf{s}_z^{(n, n)} \equiv \langle n; s | \mathbf{s}_z | n; s \rangle = n \end{cases}$$

$\Omega_x$  e  $\Omega_y$  sono nulli poiché coinvolgono elementi non diagonali di  $\mathbf{s}$ . Per quanto riguarda  $\Omega_z$  invece

$$\Omega \cdot \vec{H} = \frac{1}{H} \mathfrak{I} \left[ \mathbf{s}_x^{(n, n+1)} \mathbf{s}_y^{(n+1, n)} - \mathbf{s}_y^{(n, n+1)} \mathbf{s}_x^{(n+1, n)} + \mathbf{s}_x^{(n, n-1)} \mathbf{s}_y^{(n-1, n)} - \mathbf{s}_y^{(n, n-1)} \mathbf{s}_x^{(n-1, n)} \right] = \frac{n}{H}$$

ovvero

$$\Omega = n \frac{\vec{H}}{H^3}$$



La fase di Berry è pari al flusso di  $\Omega$  attraverso la curva fatta percorrere dal campo magnetico. È consolante il fatto che la curvatura non dipenda dal modulo dello spin (in tal caso il risultato avrebbe risentito della degenerazione in  $H = 0$ ). L'integrazione è banale<sup>3</sup> e si risolve in

$$\gamma_n(C) = -n \iint_{\partial S=C} \frac{\vec{H}}{H^3} = -n\Omega(C) \quad (2.5)$$

dove con  $\Omega(C)$  ho indicato l'angolo solido sotteso da  $C$  nel punto  $H = 0$ .

### • Fattore di fase per un fotone

Il sistema appena studiato dà lo spunto per trattare un problema completamente diverso. Mentre prima il sistema, in regime adiabatico, restava nell'autostato dell'osservabile hamiltoniana, è possibile prendere in considerazione un caso simile in cui però l'operatore non sia più associato all'energia, bensì ad un altro osservabile<sup>4</sup>. Il fotone è una particella a spin 1 di massa nulla, quindi, nel limite adiabatico, ha elicità conservata. L'elicità è associata all'operatore  $\hat{k} \cdot \mathbf{s}$  dove con  $\hat{k}$  indico la direzione di propagazione e con  $\mathbf{s}$  lo spin.

$$\hat{k} \cdot \mathbf{s} |\hat{k}, \sigma\rangle = \sigma |\hat{k}, \sigma\rangle$$

dove  $\sigma$  è l'elicità ( $\pm 1$ ). Un procedimento simile a quello che ha portato alla (2.5) conduce a

$$\gamma(C) = -\sigma\Omega(C) \quad (2.6)$$

e tale fase può essere ad esempio vista in esperimenti di interferenza<sup>5</sup>.

<sup>3</sup>si potrebbe sfruttare il fatto che  $\Omega$  è il campo di un monopolo di carica  $-n$

<sup>4</sup>che deve comunque commutare con l'hamiltoniana dato che si deve conservare nel tempo

<sup>5</sup>vedi Esperimenti

# 3 Generalizzazione

## Rimozione delle ipotesi

La domanda a cui ha risposto Berry, considerando processi adiabatici, è: “Qual è la fase del sistema?”. Generalizzare la fase di Berry, vuol dire porsi la stessa domanda omettendo qualche ipotesi. Questa operazione non fa altro che spogliare la fase degli “accessori inutili”, che ne nascondono la natura essenzialmente geometrica.

- **di non degenerazione**

Quando ho introdotto la fase geometrica, ho ricavato la relazione (4) sottointendendo che l'autovettore non fosse degenere. Quest'ipotesi, alquanto restrittiva, può essere omessa (nonostante ciò complichino notevolmente l'elegante formula ricavata da Berry). Il teorema adiabatico<sup>1</sup> vale infatti anche in caso di degenerazione e, preso nella forma (F.1) porta a

$$|\Psi\rangle = \mathbf{U}_{nm} |\phi_n\rangle \quad (3.1)$$

dove  $|\phi_n\rangle$  è una base ortonormale che “accompagna<sup>2</sup>” lo spazio dell'autovettore iniziale al passare del tempo (con autovalore  $E$ ), e il secondo indice di  $\mathbf{U}$  sta ad indicare che  $|\Psi_0\rangle = |\phi_m\rangle$  (ovvero  $\mathbf{U}_{mm}^0 = \delta_{mm}$ ). Facendo uso della (3.1) nella (F.3) e proiettando su un vettore di base, si previene all'equazione (definendo  $\mathbf{A}_{mn} \equiv \langle \phi_m | \dot{\phi}_n \rangle$ )

$$\dot{\mathbf{U}} = -(\mathbf{A} + iE\mathbf{I})\mathbf{U}$$

e quindi

$$\mathbf{U} = \text{T exp} \left( - \int_0^t (\mathbf{A} + iE\mathbf{I}) d\tau \right) \quad (3.2)$$

Poiché  $\mathbf{I}$  commuta con ogni operatore, posso riscrivere la (3.2) in modo da separare i due elementi

$$\mathbf{U} = \exp \left( -i \int_0^t E d\tau \right) \cdot \text{T exp} \left( - \int_0^t \mathbf{A} d\tau \right) \quad (3.3)$$

---

<sup>1</sup>vedi Appendice Fisica

<sup>2</sup>con ciò intendo semplicemente che  $|\phi_n\rangle$  è una base ortonormale dello spazio ad ogni istante

Come mostrerò fra poco, il primo fattore a secondo membro è il termine di natura dinamica ovvero il secondo termine ha natura geometrica e può essere considerato la generalizzazione della fase di Berry.

### • di adiabaticità

Considerando un sistema che evolve nel tempo, la fase geometrica dà informazione sullo spazio ove il sistema evolve, allo stesso modo di come la fase dinamica caratterizza la *lunghezza del viaggio*. Per separare le due fasi provo a generalizzare intuitivamente la fase dinamica calcolata in regime adiabatico e verifico a posteriori che l'assunzione è corretta in quanto la fase risultante ha natura geometrica.

La fase dinamica in approssimazione adiabatica è

$$\exp \left[ -i \int_0^t E_n(\tau) d\tau \right]$$

Provo a generalizzarla definendola

$$\gamma_d \stackrel{def}{=} - \int_0^t \langle \Psi | H | \Psi \rangle d\tau$$

Introduco ora la funzione d'onda  $\psi$  in modo che sia

$$|\Psi\rangle = e^{i\gamma_d} |\psi\rangle$$

A questo punto si ricava immediatamente dall'equazione di Schrödinger

$$\langle \psi | i\partial_t | \psi \rangle = 0 \quad \text{ovvero} \quad \Im \langle \psi | d\psi \rangle = 0 \quad (3.4)$$

La legge appena trovata non è altro che la legge del trasporto parallelo<sup>3</sup>: introducendo una base locale  $|n\rangle$  (definita su ogni configurazione dei parametri) si perviene (vd. (M.5)) a

$$\gamma(C) = -\Im \iint_{\partial S=C} \langle dn | \wedge | dn \rangle \quad (3.5)$$

Per mostrare che  $\gamma$  ha natura geometrica, basta osservare che, considerando qualsiasi altro sistema che evolve allo stesso modo in termini di "stati", ma che ha un altro operatore di evoluzione temporale<sup>4</sup>

$$\mathbf{U}' = e^{i\theta} \mathbf{U}$$

le proprietà geometriche non possono subire cambiamenti, ovvero devono essere invarianti. Ci si può convincere per sostituzione che tale proprietà è verificata e che quindi  $\gamma$  è la fase geometrica del sistema.

<sup>3</sup>vedi Appendice Matematica

<sup>4</sup>ciò equivale a fare una trasformazione di gauge, nel senso di

$$|\Psi\rangle \longrightarrow e^{i\theta} |\Psi\rangle$$

---

*Il risultato appena trovato può essere utilizzato per osservare che, anche in presenza di un'hamiltoniana indipendente da parametri esterni, uno stato iniziale non stazionario, se evolve ciclicamente, acquista una fase geometrica non necessariamente nulla.*

### • di ciclicità

L'esclusione dell'ipotesi di ciclicità è forse il risultato meno intuitivo nell'opera di generalizzazione della fase di Berry. Risulta naturale parlare di differenza di fase tra vettori rappresentanti lo stesso stato... risulta meno chiaro cosa voglia dire confrontare la fase di due stati diversi. La risposta a questa domanda è stata fornita da *Pancharatnam* che, in un suo lavoro negli anni '50, ebbe la brillante idea di considerare due fasci polarizzati (non ortogonali) in fase, quando l'intensità del fascio risultante è massima. Se ora considero due stati normalizzati  $|\phi_1\rangle$  e  $|\phi_2\rangle$  non ortogonali tra loro, l'interferenza dovuta alla sovrapposizione è

$$2(1 + \Re \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle)$$

e si definisce la differenza di fase dei due stati la fase di  $\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle$ , di modo che, quando  $\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle$  è reale e positivo, gli stati sono in fase.

Detto ciò, sfruttando il fatto che la connessione trasforma come un potenziale di gauge (vd. (5)), per analogia con il caso elettromagnetico, l'espressione<sup>5</sup>

$$|D_s \phi\rangle = \partial_s |\phi\rangle - i\mathfrak{I} \langle \phi | \dot{\phi} \rangle |\phi\rangle$$

è la derivata covariante di  $|\phi\rangle$ , il cui modulo può essere utilizzato<sup>6</sup> per definire, nello *spazio dei raggi*, la metrica

$$dl^2 = \langle D_s \phi | D_s \phi \rangle ds^2 = \langle \partial_s \phi | \mathbf{I} - |\phi\rangle \langle \phi| | \partial_s \phi \rangle ds^2 \quad (3.6)$$

Consideriamo ora un'evoluzione dello stato lungo una curva geodetica  $|\Phi\rangle$  e di rimando la corrispondente evoluzione della funzione d'onda privata della fase dinamica  $|\phi\rangle$  (e quindi caratterizzata dalla proprietà (3.4)). Dato che per  $|\phi\rangle$  la derivata covariante coincide con la derivata totale, l'equazione geodetica ha una soluzione lineare che, come sto per dimostrare, unisce vettori dello spazio di Hilbert in fase<sup>7</sup>. In 0,  $\mathfrak{I} \langle \phi_0 | \phi \rangle$  è nulla (la norma è reale), ha derivata nulla ( $|\phi\rangle$  appartiene al *sollevamento orizzontale*<sup>8</sup>) e, essendo  $\phi$  lineare rispetto al parametro, ha anche derivate superiori nulle:  $\langle \phi_0 | \phi \rangle \in \mathbb{R}$  e quindi i vettori sono in fase. Scegliendo la curva geodetica in modo che sia

$$|\Phi\rangle = e^{i\theta} |\phi\rangle$$

---

<sup>5</sup>  $s$  è una parametrizzazione della curva

<sup>6</sup> il modulo di un vettore covariante è un invariante di gauge

<sup>7</sup> in generale l'anolonomia comporta che la relazione *essere in fase con* non abbia la proprietà transitiva; nonostante ciò, in questo caso, si può affermare che tutti i vettori sono in fase

<sup>8</sup> ovvero ha la proprietà (3.4)

dal momento che  $\phi$  ha la proprietà (3.4), segue

$$\Im \langle \Phi | \partial_s \Phi \rangle = \frac{d\theta}{ds}$$

ovvero

$$\theta = \int_0^s \Im \langle \Phi | \partial_{s'} \Phi \rangle ds' \quad (3.7)$$

e  $\theta$  non è altro che la differenza di fase tra gli stati  $|\Phi_0\rangle$  e  $|\Phi\rangle$ . Quanto detto dimostra insomma che, dati due stati  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  (non ortogonali), essi hanno differenza di fase pari all'integrale della connessione di Berry su una curva geodetica.

Se ora consideriamo l'evoluzione di uno stato fino al tempo<sup>9</sup>  $\tau$ , la differenza di fase tra i due stati è data dalla regola geodetica (covariante di gauge) (3.7). L'integrale della connessione del sollevamento orizzontale lungo la curva determinata dall'equazione di Schrödinger è nullo. Integrando la connessione di Berry lungo la curva composta dal *percorso evolutivo* e da una qualsiasi geodetica congiungente lo stato finale con quello iniziale, si ottiene quindi la differenza di fase tra i due stati. Essendo chiusa la curva d'integrazione, è possibile, attraverso il teorema di Stokes, esprimere la fase  $\gamma$  come l'integrale (3.5) esteso ad una superficie che ha per contorno quella curva. La fase così calcolata generalizza la fase di Berry ed è una grandezza invariante di natura puramente geometrica.

## Stati misti

Finora ho esaminato la fase geometrica acquistata da stati puri; considerando che in realtà è difficile preparare uno stato puro, è interessante vedere come i risultati ottenuti possano essere estesi ad uno stato misto.

Come noto, uno stato misto è descritto da un operatore densità  $\rho$  definito nel modo seguente:

$$\rho \stackrel{def}{=} \sum_i p_i |\alpha^{(i)}\rangle \langle \alpha^{(i)}|$$

dove  $p_i$  è la percentuale della *miscela* caratterizzata dallo stato puro  $|\alpha^{(i)}\rangle$ . Dalla definizione, chiamando  $\mathbf{U}$  l'operatore di evoluzione temporale, segue immediatamente

$$\rho = \mathbf{U} \rho_0 \mathbf{U}^\dagger \quad (3.8)$$

e il valor medio dell'osservabile  $\mathbf{O}$  risulta essere

$$\langle \mathbf{O} \rangle = \text{tr}(\rho \mathbf{O})$$

D'ora in poi mi limito al caso di non degenerazione e scelgo la base che diagonalizza la matrice densità

$$\rho = \vec{w} \cdot \vec{\rho} \quad [\vec{\rho}]_k \equiv \rho^{(k)} \equiv |k\rangle \langle k| \quad t.c. \quad \rho^{(a)} \rho^{(b)} = \delta_{ab} \rho^{(a)} \quad (3.9)$$

<sup>9</sup>scelto con l'accortezza di non avere lo stato finale ortogonale a quello iniziale

Intuitivamente si potrebbe pensare di generalizzare le fasi totale, dinamica e geometrica, sostituendo ai valori medi dell'energia e dell'operatore di evoluzione temporale le corrispondenti medie d'insieme

$$\langle \Psi | \mathbf{H} | \Psi \rangle \longrightarrow \text{tr}(\rho \mathbf{H}) \quad (3.10a)$$

$$\langle \Psi_0 | \mathbf{U} | \Psi_0 \rangle \longrightarrow \text{tr}(\rho_0 \mathbf{U}) \quad (3.10b)$$

L'espressione della fase geometrica così ottenuta non è però invariante di gauge: la (3.8) definisce  $\rho$  a partire da  $\mathbf{U}$  ma, dato  $\rho$ , c'è una certa libertà nella scelta dell'operatore di evoluzione temporale. La classe degli operatori che verificano la (3.8) è definita dalla relazione di equivalenza

$$\mathbf{U}_1 \sim \mathbf{U}_2 \iff \exists \beta \text{ t.c. } \mathbf{U}_2^\dagger \mathbf{U}_1 = \sum_i e^{i\beta_i} \rho_0^{(i)} \quad (3.11)$$

La fase geometrica, dal momento che l'evoluzione del sistema è descritto dalla matrice densità, non dovrebbe dipendere da  $\beta$ , ma questa proprietà è violata facendo le sostituzioni (3.10).

La fase totale  $\Phi$  acquistata dal sistema è pari a

$$\Phi = \arg \{ \text{tr} [\rho_0 \mathbf{U}] \}$$

Scegliendo, all'interno della classe d'equivalenza, l'operatore di evoluzione temporale  $\mathbf{U}_s$  che soddisfa le condizioni di trasporto parallelo

$$\text{tr} [\vec{\rho} \dot{\mathbf{U}}_s \mathbf{U}_s^\dagger] = \vec{0} \quad (3.12)$$

sembra ragionevole aspettarsi che la fase geometrica corrisponda, in questo caso, alla fase totale. Dalle (3.9), (3.12) e (3.11) deriva

$$\gamma = \arg \{ \text{tr} [\rho_0 \mathbf{U}_s] \} = \arg \left\{ \sum_k w_k \langle k_0 | k \rangle e^{-\int_0^t \langle k | \dot{k} \rangle d\tau} \right\} \quad (3.13)$$

che è invariante per sostituzione dell'operatore di evoluzione temporale con uno equivalente.

## Esempi

Presento ora due interessanti esempi che, considerando un sistema a due livelli, illustrano il calcolo della fase geometrica senza l'ipotesi di ciclicità (il primo) e studiando uno stato misto (il secondo).

- **particella a spin 1/2 in un campo magnetico fluttuante**

Come ho mostrato in precedenza<sup>10</sup>, la fase di Berry per una particella di spin 1/2 immersa in un campo magnetico oscillante è pari alla metà dell'angolo solido sotteso dalla curva "percorsa"

<sup>10</sup>vedi (1.5) oppure, più in generale il risultato (2.5)

dal campo nel punto di campo nullo. Quanto detto è vero solo quando l'evoluzione è ciclica: se il campo magnetico ha una componente che fluttua in modo imprevedibile il risultato non è più applicabile. In ogni esperimento ci si deve confrontare con rumori di varia natura, è quindi interessante vedere in che modo il rumore possa influenzare la fase di Berry. Per ovvi motivi mi limito al caso di fluttuazioni di ampiezza piccola rispetto al campo e di frequenza tale da poter considerare il processo adiabatico. Si può vedere facilmente che, in assenza di rumore, la *connessione di Berry*  $\vec{A}$  è non nulla solo lungo  $\hat{\phi}$  ed è pari a

$$\vec{A} = \pm \frac{1}{2} \cos \theta \hat{\phi}$$

e il segno dipende da quale autostato si considera. Le correzioni dovute alle fluttuazioni possono essere sviluppate al prim'ordine

$$\vec{A} = \left( \pm \frac{1}{2} \cos \theta \mp \frac{1}{2} \sin \theta \partial \theta \right) \hat{\phi} \quad (3.14)$$

dove  $\partial \theta$  è la fluttuazione dell'angolo polare dovuta alla fluttuazione del campo. Poiché la connessione non ha componenti lungo  $\hat{\theta}$ , posso considerare solo la componente dell'elemento di linea  $d\ell$  lungo  $\hat{\phi}$

$$d\ell_{\phi} = \dot{\phi} dt \simeq (\dot{\phi} + \partial \dot{\phi}) dt$$

dove  $\partial \dot{\phi}$  è la correzione al primo ordine alla velocità angolare media  $\dot{\phi}$ . La fase di Berry risulta pari all'integrale della connessione (3.14) lungo la curva "percorsa" dal campo magnetico, opportunamente chiusa con una geodetica. In un sistema a due stati come quello considerato, si verifica per sostituzione nella (3.6) che la metrica sullo spazio di Hilbert corrisponde alla metrica naturale sulla sfera dei parametri, ovvero  $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ , e quindi le geodetiche sono gli archi di cerchio massimo. L'integrale che dobbiamo valutare è

$$\gamma = \int_0^T \text{Ad}\ell_{\phi} + \int_{\substack{\text{geodetica} \\ (\frac{\partial \dot{\phi}(T)}{\partial \theta(T)}) \rightarrow 0}} \vec{A} \cdot d\vec{s} \simeq \gamma_0^{\pm} + \frac{2\pi}{T} \int_0^T \mp \frac{1}{2} \sin \theta \partial \theta dt + \int_0^T \pm \frac{1}{2} \cos \theta \partial \dot{\phi} dt + \int_{\partial \phi(T) \rightarrow 0} \pm \frac{1}{2} \cos \theta d\phi$$

avendo indicato con  $T$  e con  $\gamma_0$  il periodo del campo e la fase geometrica, in assenza di rumore. Gli ultimi due termini si cancellano, e la fase geometrica acquistata risulta pari a

$$\gamma = \gamma_0^{\pm} \mp \frac{\pi}{T} \int_0^T \sin \theta \partial \theta dt$$

---

*Nell'articolo [5] viene studiata l'entità della correzione sotto l'ipotesi che il campo fluttuante  $\vec{K}$  sia un processo di Ornstein-Uhlenbeck (gaussiano<sup>11</sup>, stazionario<sup>12</sup> e markoviano<sup>13</sup>) con uno spettro lorentziano di larghezza molto minore della frequenza di Bohr dello stato considerato. Con questa assunzione si trova che la varianza diminuisce come  $1/T$  e che quindi l'adiabaticità garantisce che la fase di geometrica sia robusta rispetto a fluttuazioni.*

<sup>11</sup> $\vec{K}$  ha distribuzione gaussiana nel tempo

<sup>12</sup>uno *shift* nel tempo lascia invariate le probabilità, ovvero il campo fluttuante non dipende esplicitamente dal tempo

<sup>13</sup>il "futuro" è determinato unicamente dal "presente" e non dal "passato"

- sistema statistico a spin 1/2

L'operatore densità, per un sistema a spin 1/2, può essere scritto<sup>14</sup>

$$\rho = \frac{1}{2} (1 + \vec{P} \cdot \vec{\sigma})$$

dove la polarizzazione  $|\vec{P}| \leq 1$  e l'uguale vale se lo stato è puro. Il più generale operatore di evoluzione temporale di un sistema a due livelli è

$$\mathbf{U} = e^{-i\phi} e^{-i\theta \hat{n} \cdot \sigma} \quad (3.15)$$

Perchè  $\mathbf{U}$  discenda da  $\rho$  deve avere la proprietà

$$\mathbf{U} \vec{P}_0 \cdot \sigma = \vec{P} \cdot \sigma \mathbf{U} \quad (3.16)$$

Sostituendo la (3.15) nella (3.16) si ottiene

$$\hat{P} - \hat{P}_0 = \tan \theta \hat{n} \times (\hat{P} + \hat{P}_0)$$

e si è liberi di prendere qualsiasi  $\hat{n}$  ortogonale a  $\hat{P} - \hat{P}_0$ . Considerando che  $\hat{P}$  e  $\hat{P}_0$  sono gli unici vettori che caratterizzano il sistema, la scelta più *sensata* per  $\hat{n}$  è

$$\hat{n} = \frac{\hat{P}_0 \times \hat{P}}{\sqrt{1 - (\hat{P}_0 \cdot \hat{P})^2}}$$

A questo punto  $\theta$  è fissato, ed è possibile riscrivere l'operatore di evoluzione temporale (ponendo  $\phi = 0$ )

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{1 + \hat{P}_0 \cdot \hat{P}} - i \frac{\hat{P}_0 \times \hat{P}}{\sqrt{1 + \hat{P}_0 \cdot \hat{P}}} \cdot \sigma \right)$$

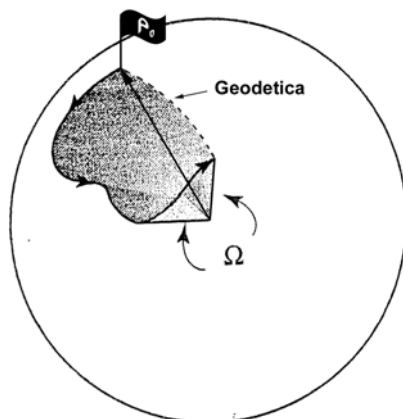
Se a questo punto scelgo l'asse  $\hat{z}$  lungo  $\vec{P}_0$  e parametrizzo la polarizzazione con l'angolo azimutale  $\theta$  e l'angolo trasversale  $\phi$  in modo che quest'ultimo si annulli al tempo 0, l'operatore assume la forma

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Sostituendo la (3.17) nella (3.13) si ottiene in definitiva

$$\gamma = \arctan \left[ P \tan \left( \frac{1}{2} \int_0^t \cos \theta \dot{\phi} dt - \frac{1}{2} \phi \right) \right]$$

<sup>14</sup>è sufficiente utilizzare che  $\{\mathbf{I}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$  è una base completa, e che  $\text{tr}[\rho] = 1$



ovvero, chiamando  $\Omega$  l'angolo solido sotteso dalla curva percorsa da  $\hat{P}_0$  rispetto all'origine degli assi e, se necessario, da una geodetica che chiude la curva

$$\gamma = -\arctan \left[ P \tan \frac{\Omega}{2} \right] \quad (3.18)$$

Il risultato generalizza, a uno stato misto, la formula (2.5) per particelle di spin 1/2.

# 4 Esperimenti

## Osservazione della fase di Berry

Spesso le fasi geometriche sono osservate facendo variare adiabaticamente parametri esterni: è questo il caso della precessione dello spin in presenza di un campo magnetico rotante. Esistono anche altre applicazioni in cui non è possibile controllare i parametri; fanno parte di questa tipologia i sistemi dove è applicata l'*approssimazione di Born-Oppenheimer*<sup>1</sup>. Per semplicità di trattazione, concludo questa breve introduzione alla fase geometrica con la descrizione di due esperimenti del primo tipo, che hanno permesso di verificare la consistenza della teoria.

- **usando una fibra ottica**

Una delle prime verifiche sperimentali della fase di Berry è stata data da Tomita e Chiao [11]. L'osservazione alla base dell'esperimento è fornita nell'articolo [9] di cui ho fatto brevemente cenno nel "ricavare" la (2.6). Quest'ultima equazione, applicata a luce polarizzata linearmente, predice una rotazione della polarizzazione dovuta a fattori geometrici. Nell'esperimento è stata studiata la suddetta rotazione usando una fibra ottica (inserita in un manicotto di Teflon) avvolta a spirale, in modo però da lasciare parallele le due estremità.

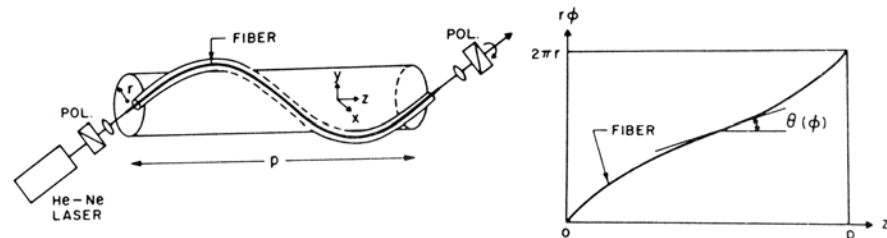


Figura 4.1: setup sperimentale

<sup>1</sup>L'approssimazione di Born-Oppenheimer in fisica molecolare consiste, in poche parole, nel considerare il moto dei nuclei molto lento rispetto a quello degli elettroni, in modo che gli stati elettronici possano essere trattati come fossero approssimativamente stazionari

Dapprima (fig. 4.1) la fibra è stata avvolta intorno al perimetro di una molla in modo da formare una spirale uniforme di inclinazione  $\theta$  dipendente dallo stato della molla. Agendo su questa, è stato variato il passo  $p$  mantenendo costante la lunghezza della fibra ottica  $s$ , ed è stata misurata la rotazione della polarizzazione in funzione dell'angolo solido percorso dalla luce nello spazio dei momenti. Dal grafico in figura 4.1 si vede che l'angolo solido spazzato dalla curva della fibra è pari a  $2\pi(1 - \cos \theta)$ , e la (2.6) può essere riscritta

$$\gamma(C) = -2\pi\sigma \left(1 - \frac{p}{s}\right)$$

Successivamente la fibra è stata avvolta intorno ad un cilindro in modo da lasciare costante il raggio della spirale ma consentire la formazione di spirali non uniformi. Dallo studio del sostegno della curva lungo cui era poggiata la fibra, è stato possibile risalire all'inclinazione  $\theta$  e quindi all'angolo solido spazzato dalla curva.

$$\gamma(C) = -\sigma \int_0^{2\pi} 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2}} d\phi$$

Plottando i risultati ottenuti sul piano cartesiano con ascissa  $\Omega$  e ordinata la rotazione dell'angolo di polarizzazione  $\Theta$ , è stato positivamente confrontato il dato sperimentale col risultato atteso. Per

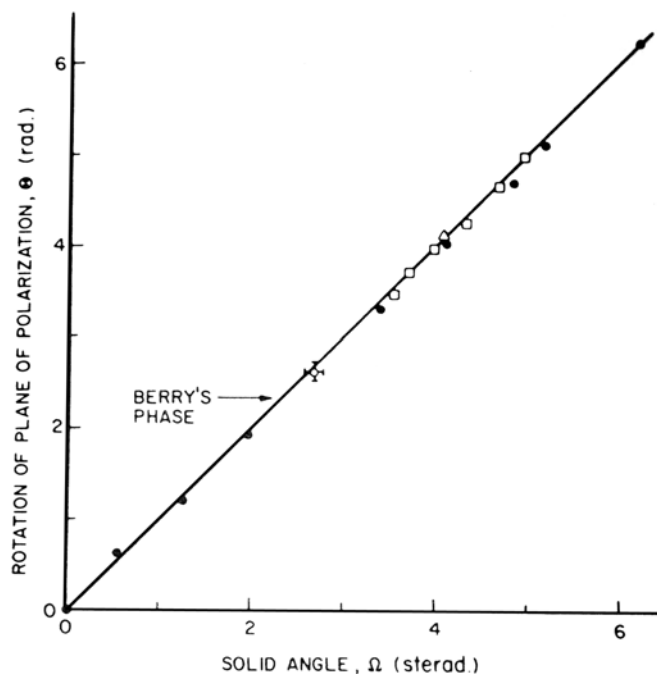


Figura 4.2: Rotazione della polarizzazione in funzione dell'angolo solido

verificare la natura geometrica della fase di Berry è stato inoltre fatta variare la forma della spirale

mantenendo costante l'angolo solido nello spazio dei momenti: l'indipendenza del risultato dalla particolare curva ha confermato la natura topologica della fase.

- sfruttando rivoluzioni incomplete del campo magnetico

Nell'esperimento descritto nell'articolo [12], è stata osservata la fase geometrica analizzando il passaggio di un fascio di neutroni attraverso un campo magnetico rotante. L'apparato sperimentale è mostrato nella figura 4.3. Il fascio di neutroni è stato<sup>2</sup> *monocromatizzato* alla lunghezza

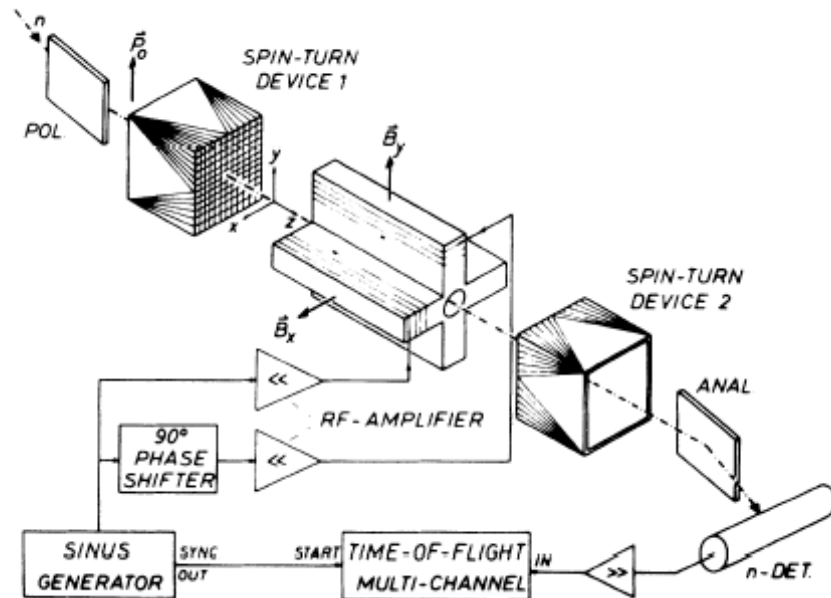


Figura 4.3: setup sperimentale

d'onda  $\lambda = 1.5\text{\AA}$  e polarizzato ( $|\vec{P}_0| = 0.95$ ). Un dispositivo di *adiabatic spin turn* ha permesso di analizzare separatamente i casi di polarizzazione iniziale lungo ogni direzione, e quindi di determinare gli elementi della matrice di rotazione  $\mathbf{P}$  della polarizzazione  $\vec{P}$

$$\vec{P} = \mathbf{P}\vec{P}_0$$

Due bobine ortogonali attraversate da segnali sfasati di  $90^\circ$  sono state utilizzate per produrre il campo magnetico rotante. Considerando che alla frequenza di  $\sim 26\text{KHz}$  il campo ruotava di circa un angolo giro nel tempo di percorrenza  $t$ , è stata fissata a  $40\text{G}$  l'intensità minima del campo, tale da garantire l'adiabaticità nel range di frequenza  $4\text{KHz} \div 41\text{KHz}$  ovvero, in termini di rotazione magnetica,  $0.3\pi \div 3.1\pi$ .

<sup>2</sup>con una coppia di cristalli Heusler

Dal momento che la polarizzazione è di modulo quasi unitario, è accettabile trattare il sistema come fosse puro. L'equazione (1.3), con<sup>3</sup>  $\theta = \pi/2$  e corretta in modo da prevedere l'ingresso del neutrone nella regione di campo non nullo al tempo variabile  $t$ , assume la forma

$$\mathbf{U} = e^{-i\omega t \frac{\sigma_z}{2}} \exp\left(-i \frac{[\cos(\omega t_0)\sigma_x + \sin(\omega t_0)\sigma_y] \omega_L t - \sigma_z \omega t}{2}\right)$$

dove con  $\omega_L$  ho indicato la frequenza di Larmor.

La (1.4), ricondotta a questo problema, si scrive  $\delta = -\omega_L t$ . Escludendo ogni termine dipendente da  $\delta$ , si può quindi dedurre per la fase geometrica qualcosa del tipo  $\gamma \sim \omega t$  e più esattamente, per quanto visto in precedenza<sup>4</sup>,  $\gamma = -\omega t$ . Inizialmente il fascio è stato polarizzato lungo  $\hat{y}$ . L'elemento di matrice  $\mathbf{P}_{yy}$  è

$$\mathbf{P}_{yy} = \cos \gamma \cos\left(\frac{1}{2} S t\right) + \frac{\gamma}{S t} \sin \gamma \sin\left(\frac{1}{2} S t\right) - \frac{\delta^2}{S^2 t^2} \cos(2\omega t_0 - \gamma) \sin\left(\frac{1}{2} S t\right) - \frac{\gamma^2}{S^2 t^2} \cos \gamma \sin\left(\frac{1}{2} S t\right) \quad (4.1)$$

dove  $S \equiv \sqrt{\omega^2 + \omega_L^2}$ .

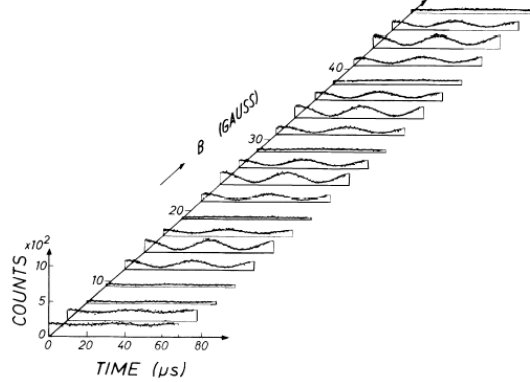


Figura 4.4: Intensità dei neutroni in funzione di  $t_0$ , per diverse frequenze di Larmor

Nell'esperimento sono state fatte misure dell'intensità del fascio in funzione di  $t_0$ , al variare dell'ampiezza del campo (vedi figura 4.4). Un FIT dei risultati sulla base dell'equazione (4.1) ha portato a stimare una  $\gamma \approx -1.12\pi$  in completo accordo con il valore atteso.

Settando il sistema in modo da poter applicare l'approssimazione adiabatica, si semplifica  $S \approx \omega_L t \gg \omega t$ , ovvero il secondo e il quarto termine della (4.1) possono essere trascurati. La figura 4.5

<sup>3</sup>il campo risiede nel piano  $\hat{x} \otimes \hat{y}$

<sup>4</sup>vedi la (2.5)

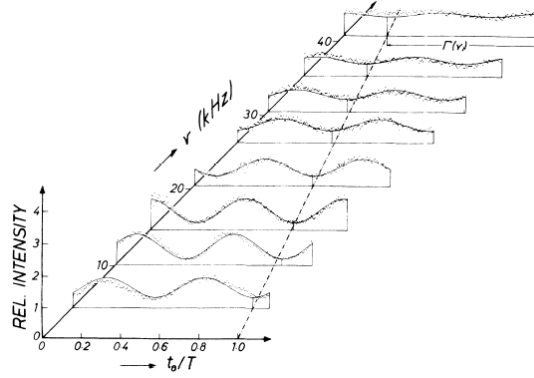


Figura 4.5: Intensità dei neutroni in funzione di  $t_0/T$  ( $T = 2\pi/\omega$ ), ad ampiezza del campo costante e per  $\omega$  variabile

può essere interpretata con l'aiuto del solo terzo termine della (4.1). La linea tratteggiata mostra la variazione di  $\gamma$  con la frequenza e costituisce una misura diretta della fase di Berry. Successivamente è stato polarizzato il fascio lungo  $\hat{z}$ . L'elemento di matrice  $\mathbf{P}_{zz}$  si scrive

$$\mathbf{P}_{zz} = \cos\left(\frac{1}{2}S t\right) + \frac{\gamma^2 - \delta^2}{S^2 t^2} \sin\left(\frac{1}{2}S t\right)$$

che, in approssimazione adiabatica, è indipendente dalla *geometria del sistema*.

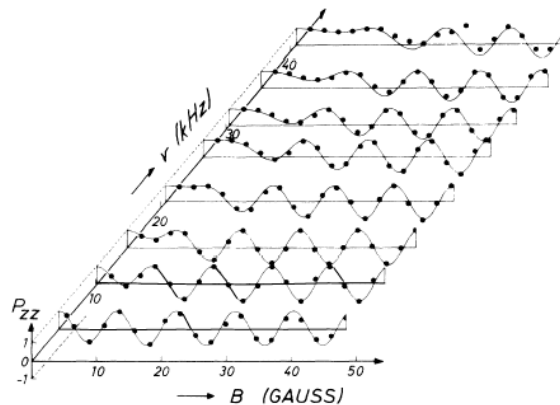


Figura 4.6: Cambiamento della polarizzazione lungo l'asse  $\hat{z}$

La figura 4.6 conferma il fatto che si poteva considerare il processo adiabatico solo per campi di ampiezza superiore a  $\sim 40\text{G}$ .



# ◇ Appendice

## Matematica

### Trasporto parallelo

Per la comprensione della fase geometrica è necessario introdurre il concetto di *anolonomia*. Per anolonomia si intende che la non integrabilità causa l'alterazione di alcune variabili in seguito alla variazione ciclica di altre. La più semplice anolonomia si ha nel trasporto parallelo. Per chiarire e generalizzare al caso quantistico il concetto di trasporto parallelo considererò un caso particolare di trasporto.

- ... classico

Le condizioni che definiscono il trasporto parallelo di un versore  $\vec{v}$  su una superficie di una sfera di raggio unitario sono che questo resti sempre perpendicolare al raggio  $\vec{r}$  e che il piano fissato dai due vettori non ruoti intorno ad  $\vec{r}$ .

$$\dot{\vec{v}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{v} \quad \vec{\Omega} = \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}} \quad (\text{M.2})$$

L'anolonomia nasce perché tale legge non è integrabile, ovvero quando  $\vec{v}$  viene trasportato su un percorso chiuso, al termine del trasporto risulta ruotato rispetto alla direzione iniziale.

Introducendo un terzo vettore in modo che  $\{\vec{v}, \vec{r}, \vec{r} \wedge \vec{v}\}$  sia una base ortonormale dello spazio, la (M.2) può essere interpretata come

$$\dot{\vec{v}} \parallel \vec{r} \quad (\text{M.3})$$

da cui segue che

$$\begin{aligned} (\vec{r} \wedge \vec{v}) \cdot \dot{\vec{v}} = 0 &\iff (\vec{r} \wedge \vec{v}) \cdot \dot{\vec{v}} = (\vec{v} \wedge \vec{r}) \cdot \dot{\vec{v}} \iff (\vec{r} \wedge \vec{v}) \cdot \dot{\vec{v}} = \vec{v} \cdot (\vec{r} \wedge \dot{\vec{v}}) \iff \\ &\iff (\vec{r} \wedge \vec{v}) \cdot \dot{\vec{v}} = \vec{v} \cdot d_t(\vec{r} \wedge \vec{v}) \iff (\vec{r} \wedge \vec{v}) \cdot \dot{\vec{v}} - \vec{v} \cdot d_t(\vec{r} \wedge \vec{v}) = 0 \end{aligned}$$

Definendo il vettore complesso

$$\vec{\psi} \stackrel{def}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} [\vec{v} + i\vec{r} \wedge \vec{v}]$$

l'ultima equazione può essere riscritta come

$$\Im [\vec{\psi}^* \cdot \dot{\vec{\psi}}] = 0 \quad \text{ovvero} \quad \Im [\vec{\psi}^* \cdot d_t \vec{\psi}] = 0 \quad (\text{M.4})$$

dove  $d\vec{\psi}$  è la variazione di  $\psi$  in seguito al cambiamento  $d\vec{r}$ . Per calcolare di quanto risulti ruotato il vettore in seguito al trasporto lungo una superficie chiusa, è necessario definire una base locale  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  in ogni punto della sfera, ovvero specificare il versore complesso

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\vec{e}_1 + i\vec{e}_2]$$

Se l'angolo che forma il vettore trasportato con  $\vec{e}_1$  è  $\theta$ , segue direttamente dalla definizione di  $\vec{\psi}$

$$\vec{\psi} = e^{-i\theta} \vec{n}$$

che sostituito nella (M.4) dà

$$d\theta = \Im [\vec{n}^* \cdot d\vec{n}]$$

L'anolonomia è quindi data dall'integrazione di  $\Im[\vec{n}^* \cdot d\vec{n}]$  sulla curva lungo la quale è trasportato il vettore<sup>5</sup>

$$\theta_C = \Im \left[ \oint_{C=\partial S} \vec{n}^* \cdot d\vec{n} \right] \xrightarrow{\text{Teo Stokes}} \theta_C = \Im \iint_S d\vec{n}^* \wedge \cdot d\vec{n} \quad (\text{M.5})$$

Un cambiamento della base può essere rappresentato da una rotazione locale degli assi

$$\vec{n}(\vec{r}) \longrightarrow e^{iR(\vec{r})} \vec{n}(\vec{r})$$

che lascia comunque invariato  $d\vec{n}^* \wedge \cdot d\vec{n}$ : l'integrando della (M.5) è quindi indipendente dalla scelta della base locale.

### • ... quantistico

La generalizzazione quantistica del trasporto parallelo si ha rimpiazzando il versore complesso  $\vec{\psi}$  con lo stato quantistico  $|\psi\rangle$ , e la posizione sulla sfera con la posizione nello spazio dei parametri del sistema. Come nel caso classico,  $|\psi\rangle$  è definito a meno di una fase; la (M.4) può essere quindi interpretata come

$$\Im [\langle \psi | d\psi \rangle] = 0 \quad (\text{M.6})$$

Analogamente a quanto già visto, questa legge non è integrabile, ovvero quando i parametri variano ciclicamente (percorrendo la curva  $C$ ) la funzione d'onda che obbedisce alla legge acquista una fase

$$\langle \psi_0 | \psi_C \rangle = e^{i\gamma(C)} \quad (\text{M.7})$$

---

5

$$d\vec{a} \wedge \cdot d\vec{b} \stackrel{\text{def}}{=} dX_1 dX_2 \left( \frac{\partial \vec{a}}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial \vec{b}}{\partial X_2} - \frac{\partial \vec{a}}{\partial X_2} \cdot \frac{\partial \vec{b}}{\partial X_1} \right)$$

dove  $X_1$  e  $X_2$  sono parametri che specificano la posizione sulla sfera

# ◇ Appendice

## Fisica

### Teorema adiabatico

Sia  $\mathbf{H}$  un'Hamiltoniana dipendente dal tempo con la proprietà essenziale che gli autovalori restino distinti per l'intervallo di tempo considerato; il *teorema adiabatico* costituisce una proprietà dello spettro discreto di  $\mathbf{H}$ . Nonostante l'inutilità dell'assunzione, per semplicità ipotizzo lo spettro interamente discreto.

Siano gli autovalori  $\epsilon_i$  e i proiettori sui rispettivi sottospazi  $\Pi_i$  funzioni continue del tempo ed inoltre:

1. gli autovalori restino distinti durante l'intero periodo;
2. i proiettori siano  $C^2$  nell'intervallo;

allora

- ★ per l'Hamiltoniana vale la decomposizione spettrale

$$\mathbf{H} = \sum_n \epsilon_n \Pi_n$$

- ★ per i proiettori valgono le relazioni di ortogonalità

$$\begin{cases} \Pi_n \Pi_m = \delta_{nm} \Pi_m \\ \sum_n \Pi_n = \mathbf{I} \end{cases}$$

- ★ è possibile stabilire un'equivalenza unitaria tra l'insieme dei proiettori al tempo 0 e al tempo  $t$

$$\Pi_n = \mathbf{S} \Pi_n^0 \mathbf{S}^\dagger$$

$\mathbf{S}$  non è univocamente definito<sup>6</sup>; si può rimuovere l'arbitrarietà richiedendo che questo verifichi l'equazione

$$\begin{cases} i\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{K}\mathbf{S} \\ \mathbf{K} = i \sum_n \dot{\Pi}_n \Pi_n \end{cases}$$

e che quindi, per  $\mathbf{K}$  valga

$$\Pi_n \mathbf{K} \Pi_n = 0$$

Il *teorema adiabatico* enuncia che se l'Hamiltoniana al tempo 0 e al tempo  $T$  prende due valori assegnati  $\mathbf{H}_0$  e  $\mathbf{H}_T$ , indicando con  $\mathbf{U}$  l'operatore di evoluzione temporale e con  $\mathbf{V}_n$  l'autospazio  $n$ -esimo

$$\mathbf{U} \Big|_{T \rightarrow \infty} : \mathbf{V}_n^0 \longrightarrow \mathbf{V}_n \quad (\text{F.1})$$

dacché

$$|\Psi\rangle \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \sum_n \exp\left(-i \int_0^t \epsilon_n d\tau\right) \mathbf{S} \Pi_n^0 |\Psi_0\rangle + O\left(\frac{1}{T}\right) \quad (\text{F.2})$$

Definendo

$$|\Psi_n^\bullet\rangle \stackrel{def}{=} \exp\left(-i \int_0^t \epsilon_n d\tau\right) \mathbf{S} \Pi_n^0 |\Psi_0\rangle$$

e considerando solo il contributo preponderante della funzione d'onda (sia ad esempio lo stato  $n$ -esimo), segue inoltre che

$$\Pi_n (i\partial_t - \mathbf{H}) |\Psi_n^\bullet\rangle = 0 \quad (\text{F.3})$$

---

<sup>6</sup>componendo  $\mathbf{S}$  con un generico operatore che commuta con il proiettore, si ottiene un operatore che soddisfa la stessa equazione

---

## Referenze

- [1] M.V. Berry: *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes*, Proc. R. Soc. Lond. A. 395 (1984), 45-57
- [2] Pavel Exner, Vladimir A. Geyler: *Berry phase for a potential well transported in a homogeneous magnetic field*, arXiv:quant-ph/0005037
- [3] V. A. Geyler, A. V. Shorokhov: *Geometrical phase for a three-dimensional anisotropic quantum well*, arXiv:cond-mat/0409754
- [4] J. Zak: *Magnetic translation groups*, Phys. Rev. A134 (1964), 1602-1606
- [5] G. De Chiara, G. M. Palma: *Berry phase for a spin 1/2 in a classical fluctuating field*, arXiv:quant-ph/0303155
- [6] Y. Aharonov, J. Anandan: *Phase Change during a Cyclic Quantum Evolution*, Phys. Rev. Lett. 58, 1593 (1987)
- [7] J. Samuel, R. Bhandari: *General Setting for Berry's Phase*, Phys. Rev. Lett. 60, 2339 (1988)
- [8] D-M Tong, J-L Chen, J-F Du: *Geometric Phase for Mixed States*, Chin. Phys. Lett. 20(6), 793 (2002)
- [9] R.Y. Chiao, Y-S Wu: *Manifestations of Berry's Topological Phase for the Photon*, Phys. Rev. Lett. 57(8), 933 (1986)
- [10] D.W. Chiou, D.H. Lee: *Eigen Wavefunctions of a Charged Particle Moving in a Self-Linking Magnetic Field*, arXiv:math-ph/0411044
- [11] A. Tomita, R.Y. Chiao: *Observation of Berry's Topological Phase by Use of an Optical Fiber*, Phys. Rev. Lett. 57(8), 937 (1986)
- [12] H. Weinfurter, G. Badurek: *Measurement of Berry's Phase for Noncyclic Evolution*, Phys. Rev. Lett. 64(12), 1318 (1989)
- [13] Y. Aharonov, D. Bohm: *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*, Phys. Rev. 115(3), 485 (1959)
- [14] B. Simon: *Holonomy, the Quantum Adiabatic Theorem, and Berry's Phase*, Phys. Rev. 51(24), 2167 (1983)

## Bibliografia

- [a] Franco Salmistraro: *La fase di Berry*
- [b] Alfred Shapere, Frank Wilczek: *Geometric phases in physics*
- [c] Albert Messiah: *Quantum Mechanics*
- [d] Jun John Sakurai: *Meccanica quantistica moderna*
- [f] David F. Griffiths: *Introduction to Quantum Mechanics*