

Physique Statistique (PHY432)

Amphi 8: Gaz quantiques

Marc Mézard

Rappel. Page web du cours:

<http://www.lptms.u-psud.fr/membres/mezard/X.html>

Chapitres et paragraphes du poly enseignés à chaque amphi. Suggestions d'exercices et problèmes corrigés...

Gaz quantiques

- Principe de Pauli
- Exercices d'échauffement (deux particules, deux états)
- Le grand saut: Pauli + grand canonique



Virage dangereux!

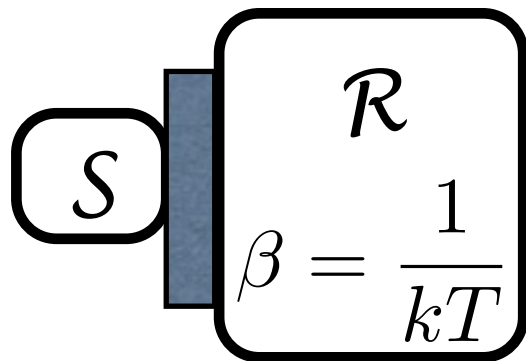


Etoiles à neutrons, semiconducteurs, supraconducteurs, Rayonnement de l'univers, condensats de Bose, lasers...

Particules identiques

Ensemble canonique.

S : état propre de $\hat{H}$, $|\psi_n\rangle$



$$p_n = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_n}$$

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$$

Rien à changer. Mais $|\psi_n\rangle$
doit satisfaire au
principe de Pauli

Effets considérables: classification
périodique, stabilité de la
matière, effet laser, métaux-
isolants, supraconductivité,...



Principe de Pauli

Contraint la symétrie des états quantiques des particules indiscernables

Bosons:

$|\psi\rangle$ symétrique par l'échange de deux particules

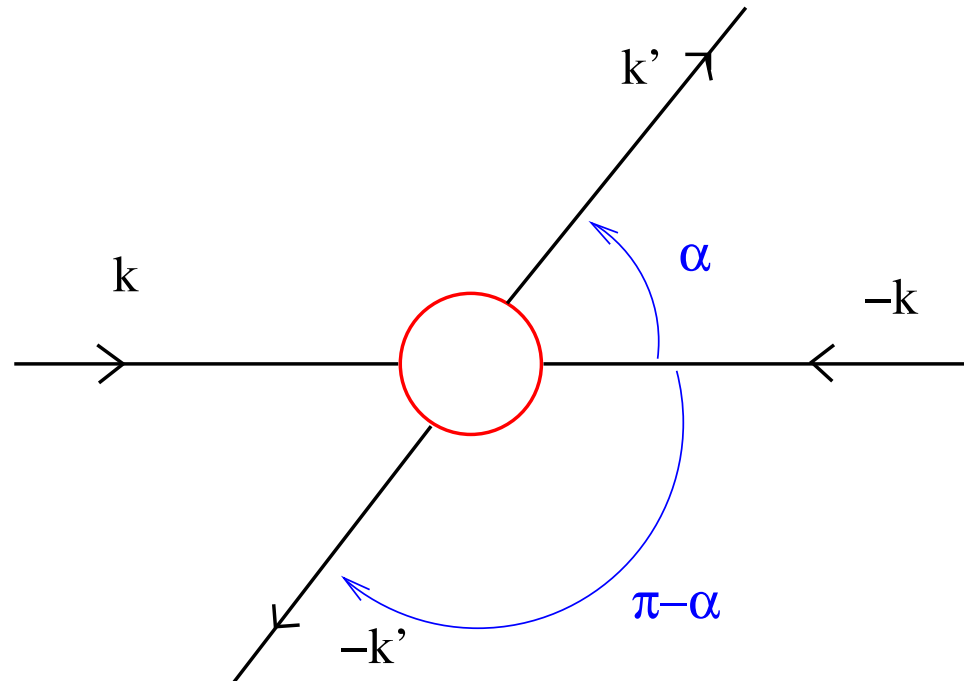
$$P_{12}|\psi\rangle = |\psi\rangle$$

Fermions:

$|\psi\rangle$ antisymétrique par l'échange de deux particules

$$P_{12}|\psi\rangle = -|\psi\rangle$$

Principe de Pauli et diffusion de deux particules

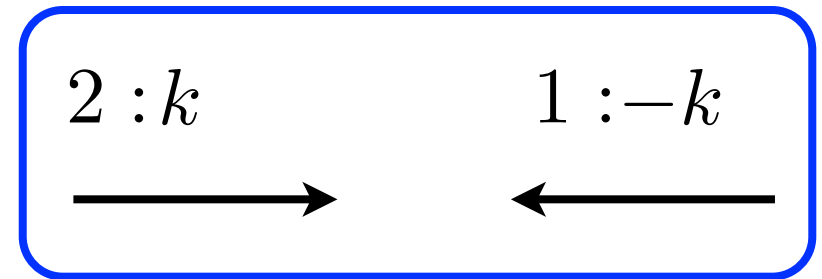
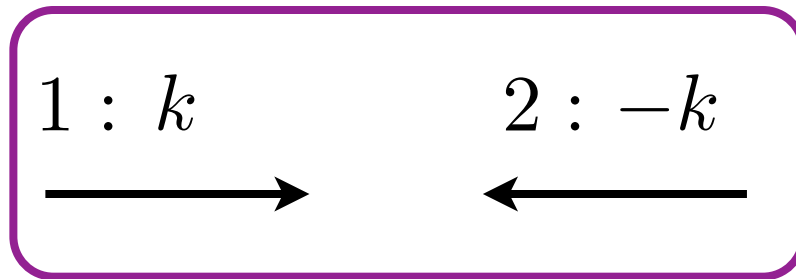


Etat initial: une particule $|k\rangle$, une particule $|-k\rangle$

Etat final: une particule $|k'\rangle$, une particule $|-k'\rangle$

Principe de Pauli et diffusion de deux particules: cas des fermions

Etat initial: une particule $|k\rangle$
une particule $| - k\rangle$

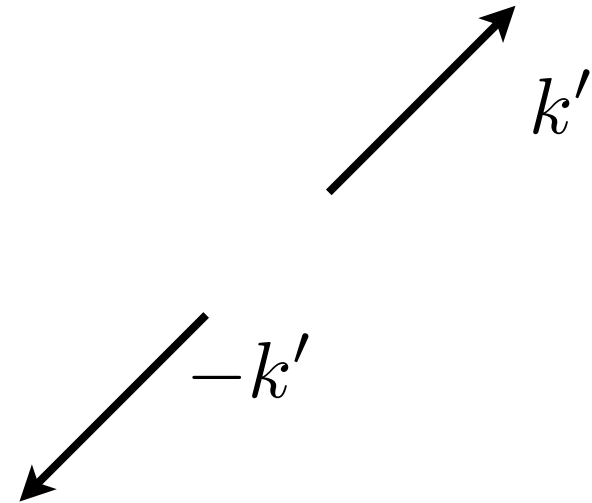


$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|k, -k\rangle - |-k, k\rangle)$$

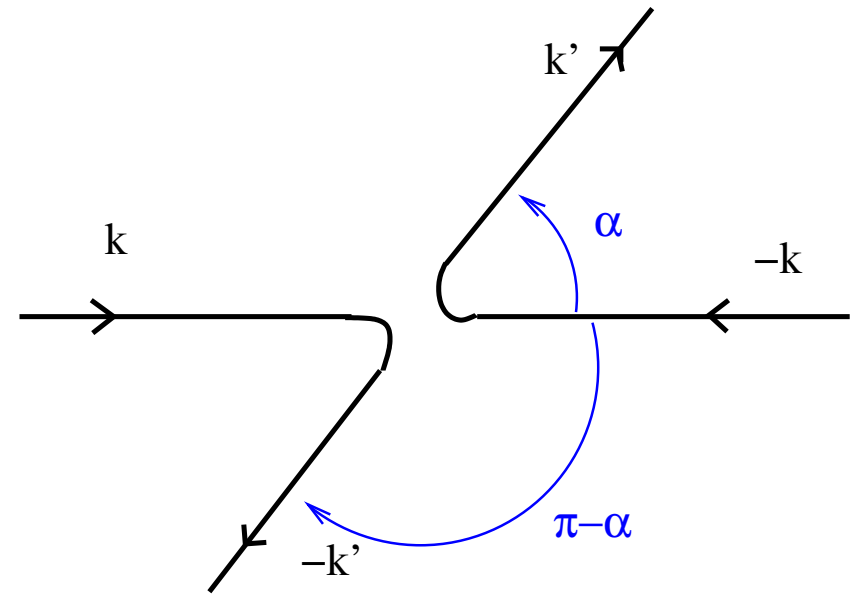
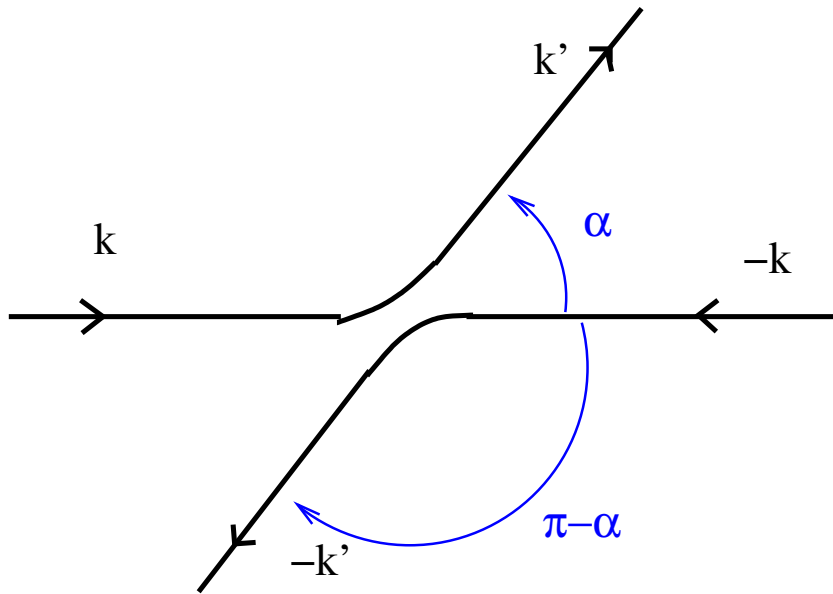
Principe de Pauli et diffusion de deux particules: cas des fermions

Etat final:

$$|\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|k', -k'\rangle - |-k', k'\rangle)$$



Principe de Pauli et diffusion de deux particules: cas des fermions



Amplitude de transition

$$f(\alpha) = \langle k', -k' | S | k, -k \rangle$$

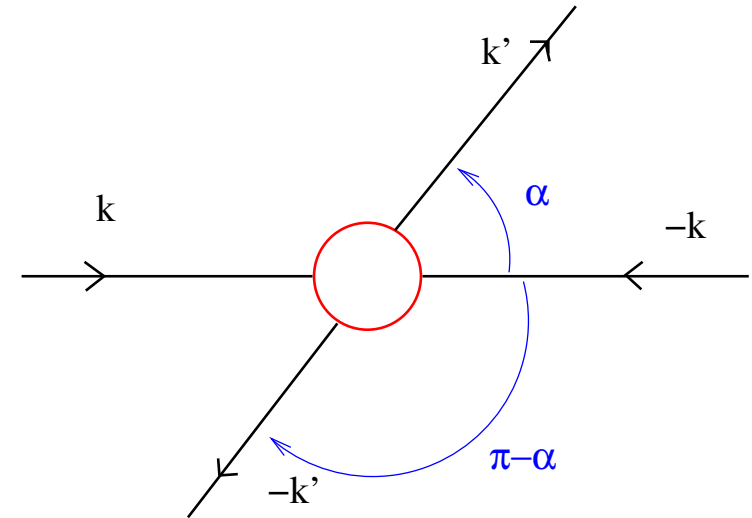
$$f(\pi - \alpha) = \langle -k', k' | S | k, -k \rangle$$

Principe de Pauli et diffusion de deux particules: cas des fermions

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|k, -k\rangle - | -k, k\rangle)$$

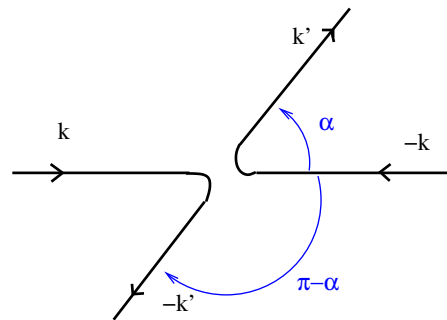
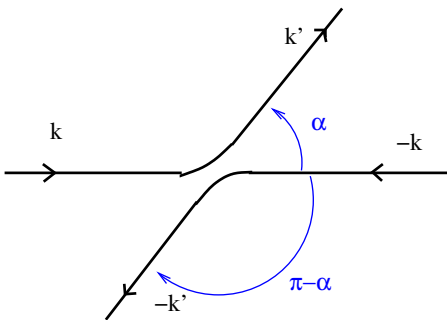
$$|\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|k', -k'\rangle - | -k', k'\rangle)$$

$$\langle\psi_f|S|\psi_i\rangle = f(\alpha) - f(\pi - \alpha)$$



Probabilité de diffusion

$$|f(\alpha) - f(\pi - \alpha)|^2$$

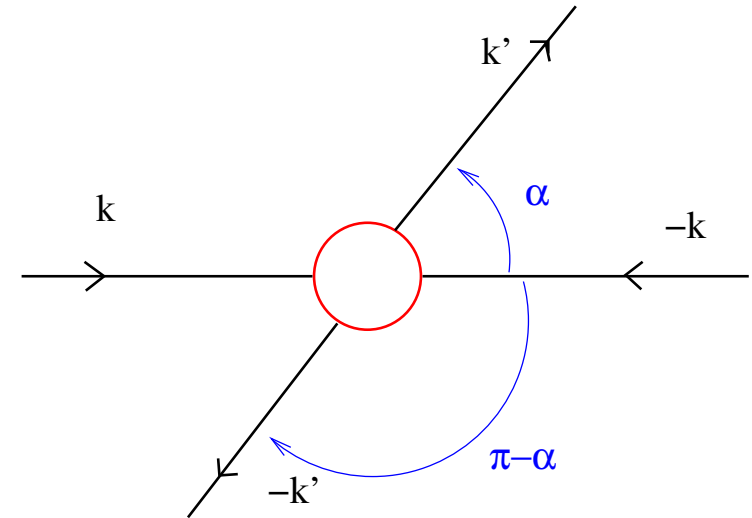


Principe de Pauli et diffusion de deux particules: cas des bosons

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|k, -k\rangle + | -k, k\rangle)$$

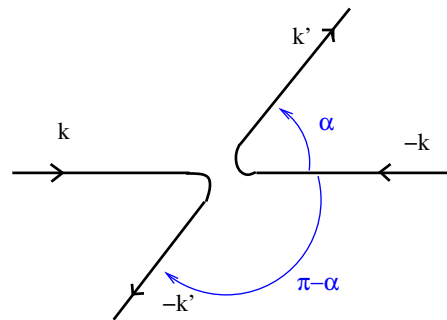
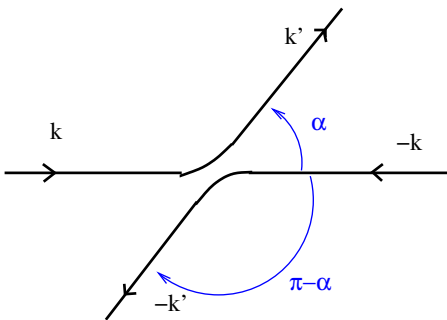
$$|\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|k', -k'\rangle + | -k', k'\rangle)$$

$$\langle\psi_f|S|\psi_i\rangle = f(\alpha) + f(\pi - \alpha)$$



Probabilité de diffusion

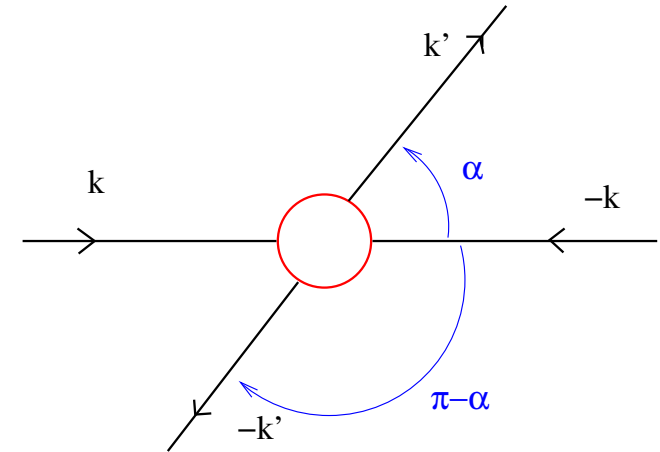
$$|f(\alpha) + f(\pi - \alpha)|^2$$



Principe de Pauli et diffusion de deux particules

Fermions: $p = |f(\alpha) - f(\pi - \alpha)|^2$

Bosons: $p = |f(\alpha) + f(\pi - \alpha)|^2$



Diffusion à 90°:

Fermions: $p = 0$

Bosons: $p = 4|f(\pi/2)|^2$

Discernables: $p = 2|f(\pi/2)|^2$

Limite de basse énergie:

$$f(\alpha) = C^{te}$$

Fermions sans interaction. Bosons: diffusion plus forte que discernables

Système de deux électrons, spin

$$\hat{H} = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + V(\vec{r}_1) + V(\vec{r}_2) + \cancel{W(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}$$

Etats à une particule: $|\psi\rangle = |\phi_n, \pm\rangle$

Etats à deux particules:

Energie de Coulomb différentes:
Interactions d'échange (ferro)

Singulets: $C(|\phi_k; \phi_l\rangle + |\phi_l; \phi_k\rangle) \times \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle - |-, +\rangle)$
 $k \leq l$

Triplets: $C(|\phi_k; \phi_l\rangle - |\phi_l; \phi_k\rangle) \times \begin{cases} |+, +\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle + |-, +\rangle) \\ |-, -\rangle \end{cases}$
 $k < l$

Importance de l'indiscernabilité

Système à deux niveaux,
température T : $U = ?$

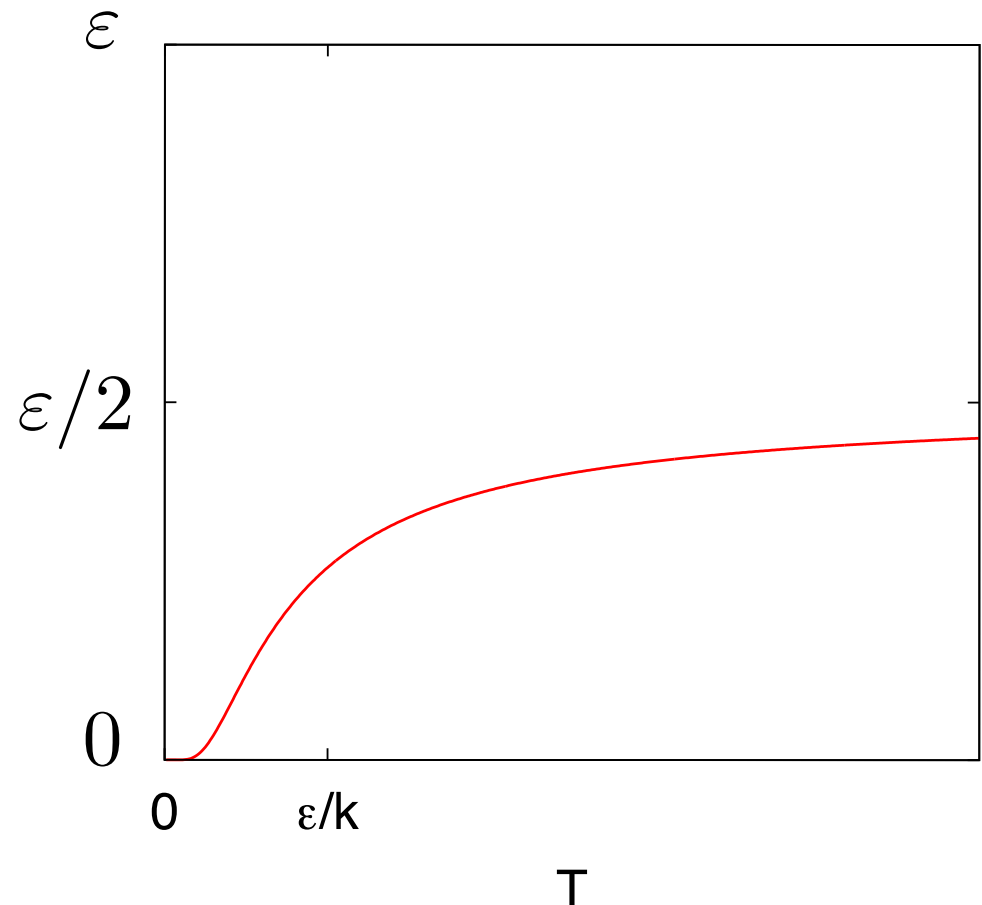


Une particule:

$$p_0 = \frac{1}{1 + e^{-\beta\epsilon}}$$

$$p_1 = \frac{e^{-\beta\epsilon}}{1 + e^{-\beta\epsilon}}$$

$$U_1 = \frac{\epsilon e^{-\beta\epsilon}}{1 + e^{-\beta\epsilon}}$$



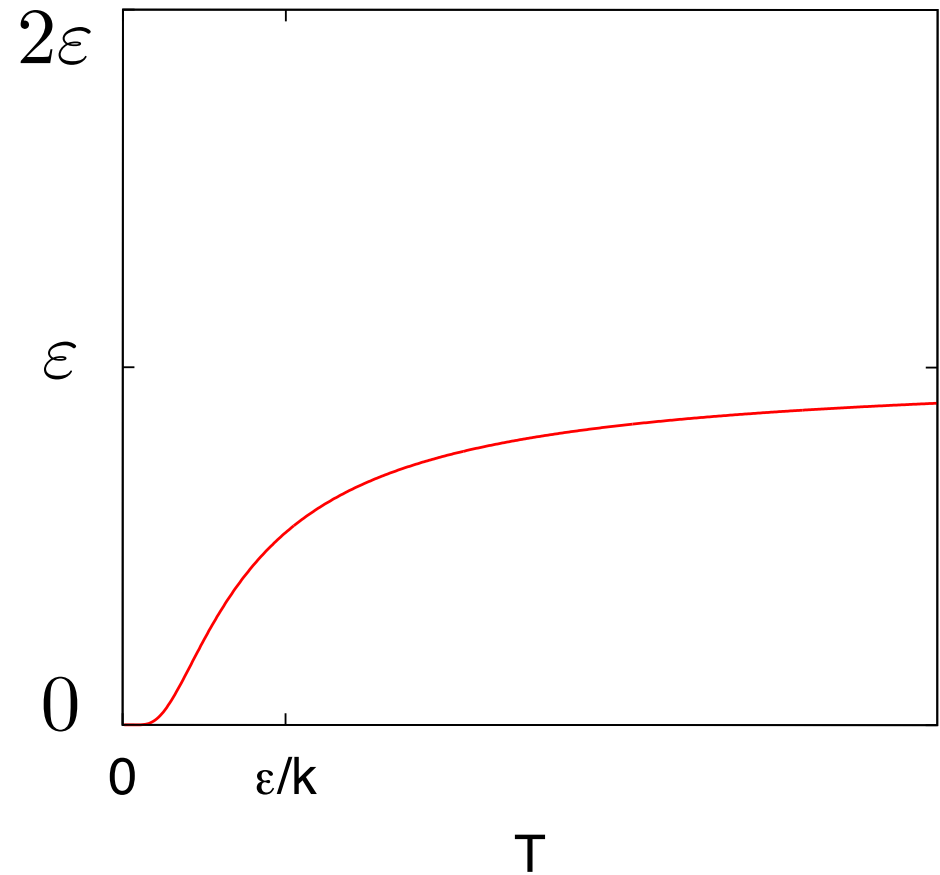
Importance de l'indiscernabilité

Système à deux niveaux,
température T : $U = ?$



Deux particules discernables:

$$U_2 = 2U_1 = 2 \frac{\varepsilon e^{-\beta\varepsilon}}{1 + e^{-\beta\varepsilon}}$$

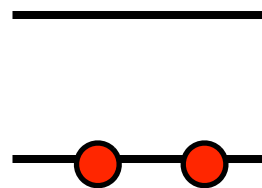


Importance de l'indiscernabilité

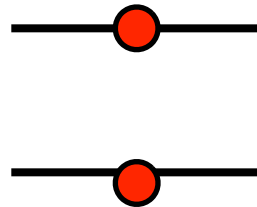
Système à deux niveaux,
température T : $U = ?$

Deux bosons indiscernables:

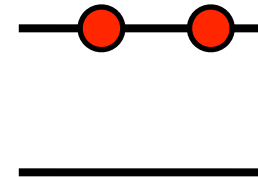
NB: Une seule
configuration



1



$e^{-\beta\varepsilon}$



$e^{-2\beta\varepsilon}$

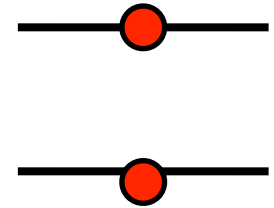
Poids $e^{-\beta E}$:

$$U = \frac{\varepsilon e^{-\beta\varepsilon} + 2\varepsilon e^{-2\beta\varepsilon}}{1 + e^{-\beta\varepsilon} + e^{-2\beta\varepsilon}}$$

Importance de l'indiscernabilité

Système à deux niveaux,
température T : $U = ?$

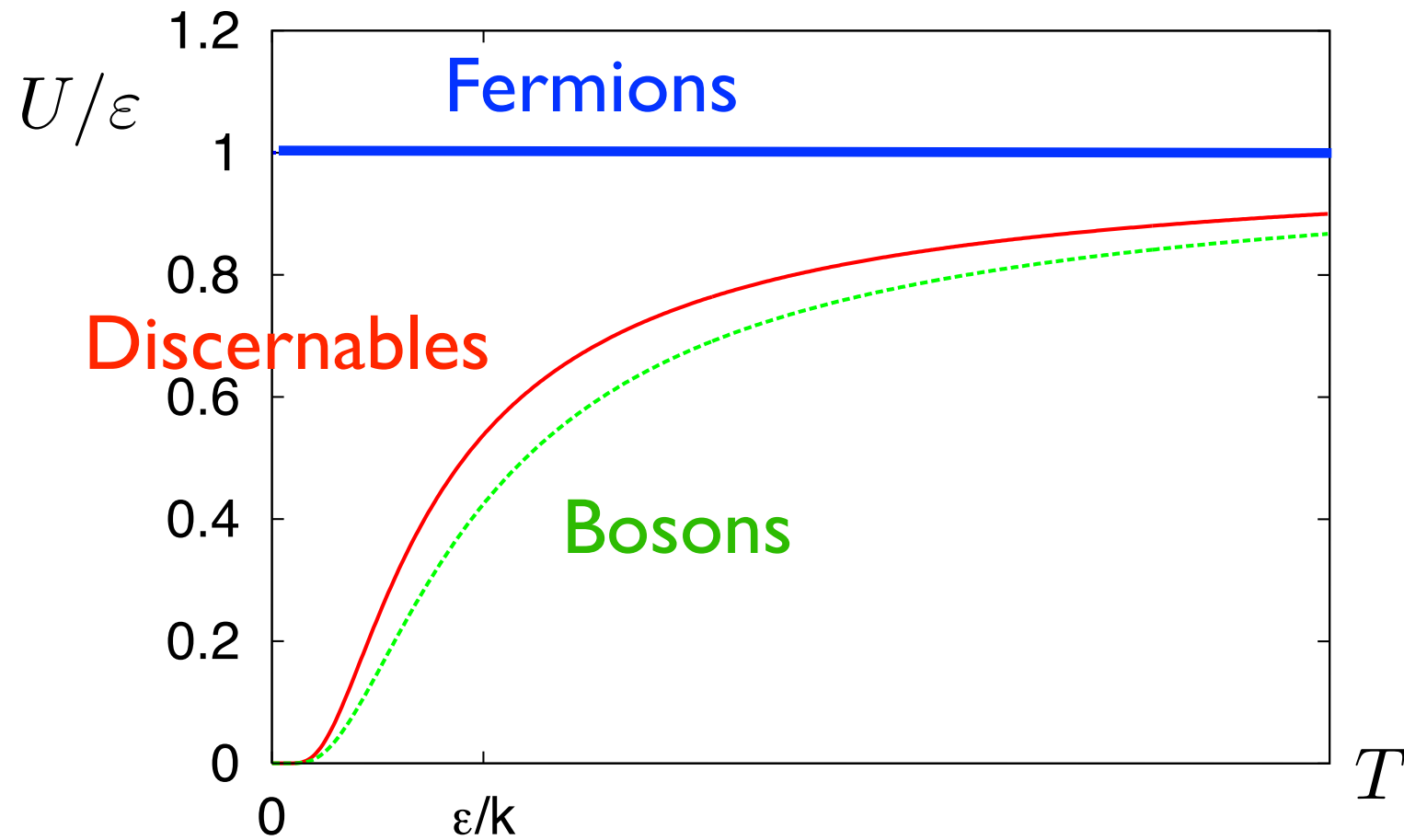
Deux fermions indiscernables (sans spin):



$U = \varepsilon$ à toute température!

Importance de l'indiscernabilité

Système à deux niveaux,
température T : $U = ?$



Gaz parfait quantique

$$H = \sum_{i=1}^N h(i) \qquad h|\phi_k\rangle = \epsilon_k |\phi_k\rangle, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

$|\phi_k\rangle$ prend en compte tous les degrés de liberté (spin, etc...)
et le principe de Pauli

Température T Ensemble canonique

Une particule: $z_1(\beta) = \sum_k e^{-\beta \epsilon_k}$

Deux particules?

Deux particules discernables

$$|\phi_k; \phi_l\rangle \rightarrow E = \epsilon_k + \epsilon_l \quad ; \quad k, l \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

Fonction de partition:

$$Z_D(\beta) = \sum_{k,l} e^{-\beta(\epsilon_k + \epsilon_l)} = \left[\sum_k e^{-\beta\epsilon_k} \right]^2 = z_1(\beta)^2$$

En général, pour N particules discernables identiques:

$$Z_D(\beta) = z_1(\beta)^N$$

Cas des fermions et des bosons?

$$1/N!$$

?...Non...

Deux fermions

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi_k; \phi_l\rangle - |\phi_l; \phi_k\rangle) \rightarrow E = \epsilon_k + \epsilon_l \quad ; \quad 0 \leq k < l$$

Fonction de partition:

$$Z_F(\beta) = \sum_{0 \leq k < l} e^{-\beta(\epsilon_k + \epsilon_l)} = \frac{1}{2} \left[\sum_k e^{-\beta \epsilon_k} \right]^2 - \frac{1}{2} \sum_k e^{-2\beta \epsilon_k}$$

$$= \frac{1}{2} z_1(\beta)^2 - \frac{1}{2} z_1(2\beta)$$

Deux bosons

$$C(|\phi_k; \phi_l\rangle + |\phi_l; \phi_k\rangle) \rightarrow E = \epsilon_k + \epsilon_l \quad ; \quad 0 \leq k \leq l$$

Fonction de partition:

$$Z_B(\beta) = \sum_{0 \leq k \leq l} e^{-\beta(\epsilon_k + \epsilon_l)} = \frac{1}{2} \left[\sum_k e^{-\beta \epsilon_k} \right]^2 + \frac{1}{2} \sum_k e^{-2\beta \epsilon_k}$$

$$= \frac{1}{2!} z_1(\beta)^2 + \frac{1}{2} z_1(2\beta)$$

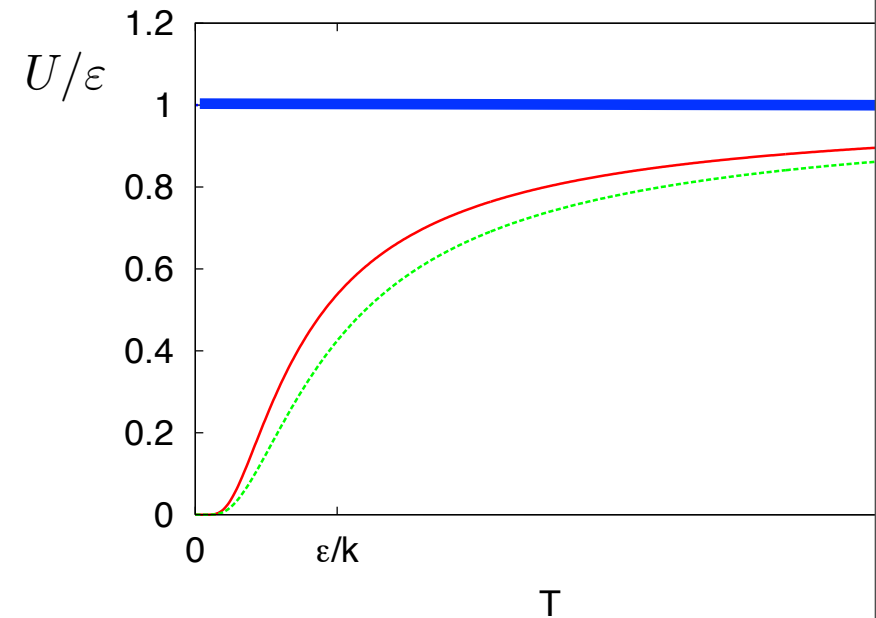
Thermodynamique de deux particules identiques, température $T = 1/\beta$

Fonction de partition:

$$Z_D(\beta) = z_1(\beta)^2$$

$$Z_F(\beta) = \frac{1}{2!} z_1(\beta)^2 - \frac{1}{2} z_1(2\beta)$$

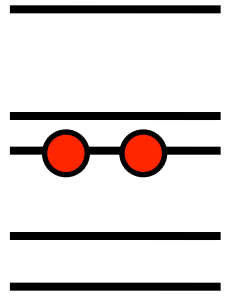
$$Z_B(\beta) = \frac{1}{2!} z_1(\beta)^2 + \frac{1}{2} z_1(2\beta)$$



Cas de deux niveaux

Comportements thermodynamiques
complètement différents

Corrélations induites par la statistique



$$P_D(|\phi_k, \phi_k\rangle) = \frac{e^{-2\beta\epsilon_k}}{\sum_{k'} e^{-2\beta\epsilon_{k'}} + \sum_{k' \neq l'} e^{-\beta(\epsilon_{k'} + \epsilon_{l'})}}$$

$$P_F(|\phi_k, \phi_k\rangle) = 0$$

$$P_B(|\phi_k, \phi_k\rangle) = \frac{e^{-2\beta\epsilon_k}}{\sum_{k'} e^{-2\beta\epsilon_{k'}} + \sum_{k' < l'} e^{-\beta(\epsilon_{k'} + \epsilon_{l'})}}$$

$P_F < P_B < P_D$ malgré l'absence d'interactions

“Les fermions se repoussent, les bosons s'attirent”

“Les bosons s’attirent”

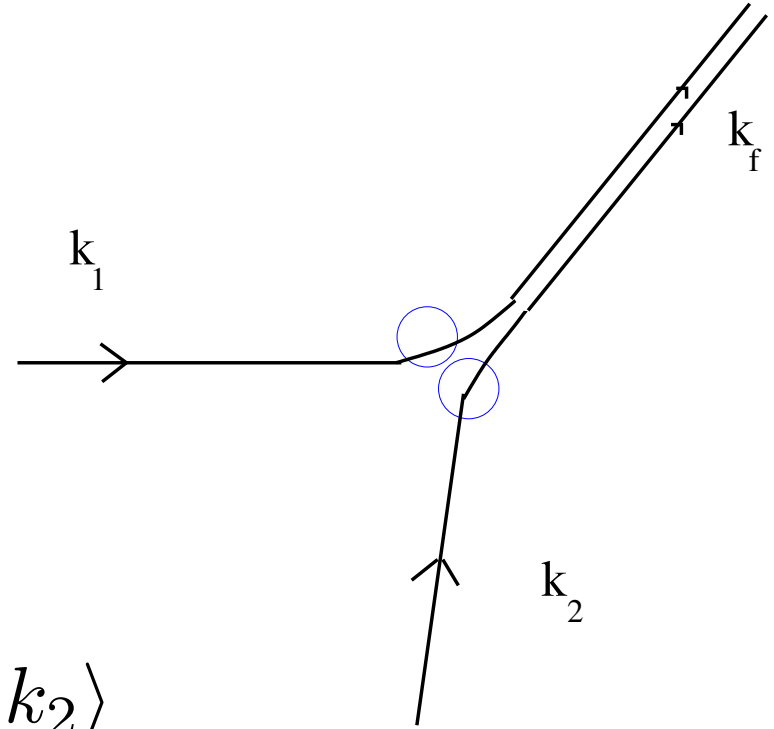
$$|\Psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|k_1, k_2\rangle + |k_2, k_1\rangle)$$

$$|\Psi_f\rangle = |k_f, k_f\rangle$$

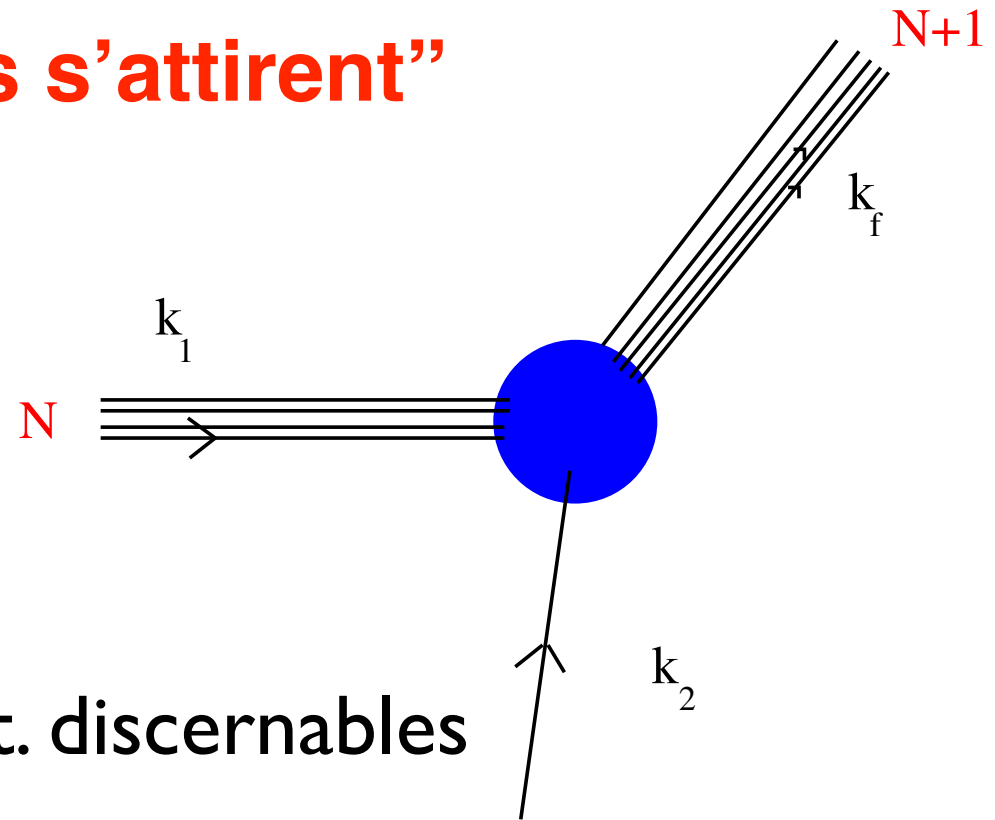
$$\langle\Psi_f|S|\Psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} 2 \langle k_f|S|k_1\rangle \langle k_f|S|k_2\rangle$$

$$\langle\Psi_f|S|\Psi_i\rangle = \sqrt{2} \times \text{part. discernables}$$

Proba (2 bosons dans le même f) = $\sqrt{2}$ $\times$ proba(part.disc.)



“Les bosons s’attirent”



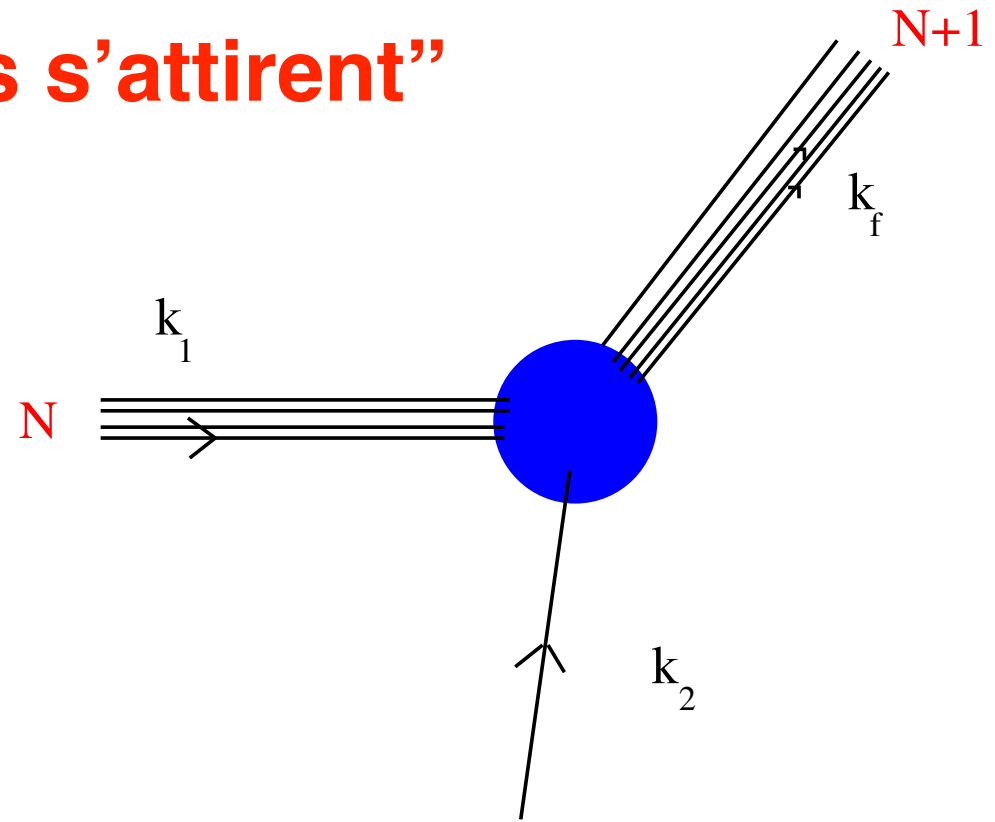
$$\langle \Psi_f | S | \Psi_i \rangle = \sqrt{N+1} \times \text{part. discernables}$$

$$\text{Proba (} N+1 \text{ bosons dans le même } f \text{)} = (N+1) \times \text{proba}(\text{part.disc.})$$

Effet laser: émission stimulée

“Les bosons s’attirent”

Origine du $\sqrt{N+1}$

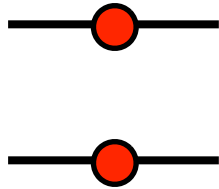


$$|\Psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{N+1}} \sum_{j=1}^{N+1} |1 : k_1 ; \dots ; j : k_2 ; \dots ; N+1 : k_1\rangle$$

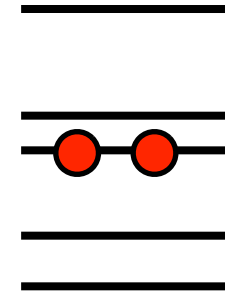
$$|\Psi_f\rangle = |1 : k_f ; \dots ; N : k_f\rangle$$

$$\langle \Psi_f | S | \Psi_i \rangle = \frac{1}{\sqrt{N+1}} (N+1) \langle k_f | S | k_1 \rangle^N \langle k_f | S | k_2 \rangle$$

N particules discernables sans interactions



2 particules, 2 états



2 particules, ∞ états

En général, pour N particules discernables identiques:

$$Z_D(\beta) = z_1(\beta)^N$$

Cas des fermions et des bosons: subtil

- ◆ Représentation en nombres d'occupations
- ◆ Calcul grand canonique

N particules discernables sans interactions

Cas des fermions et des bosons: subtil

◆ Représentation en nombres d'occupations

◆ Calcul grand canonique



Représentation en nombre d'occupations

n_k : nombre de particules
dans l'état k

k		n_k
3	————	0
2	—●—●—	2
1	————	0
0	—●●●—	3

Ex: 5 bosons

$$\begin{aligned}
 |n_0 = 3, n_1 = 0, n_2 = 2, n_{\geq 3} = 0\rangle\rangle &= \frac{1}{\sqrt{10}} [\\
 &|0, 0, 0, 2, 2\rangle + |0, 0, 2, 0, 2\rangle + |0, 2, 0, 0, 2\rangle + |2, 0, 0, 0, 2\rangle \\
 &+ |0, 0, 2, 2, 0\rangle + |0, 2, 0, 2, 0\rangle + |2, 0, 0, 2, 0\rangle \\
 &+ |0, 2, 2, 0, 0\rangle + |2, 0, 2, 0, 0\rangle + |2, 2, 0, 0, 0\rangle \\
 &]
 \end{aligned}$$

Représentation en nombre d'occupations

n_k : nombre de particules
dans l'état k

k		n_k
3		1
2		0
1		1
0		1

Ex: 3 fermions

$$||n_0 = 1, n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 1, n_{\geq 4} = 0\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{3!}} \times$$

$$\begin{vmatrix} |1 : 0\rangle & |1 : 1\rangle & |1 : 3\rangle \\ |2 : 0\rangle & |2 : 1\rangle & |2 : 3\rangle \\ |3 : 0\rangle & |3 : 1\rangle & |3 : 3\rangle \end{vmatrix}$$

Det. de Slater

Représentation en nombre d'occupations

k		n_k
3	————	0
2	—●—●—	2
1	————	0
0	—●●●—	3

Bosons $n_k \in \mathbb{N}$

k		n_k
3	—●—	1
2	————	0
1	—●—	1
0	—●—	1

Fermions $n_k \in \{0, 1\}$

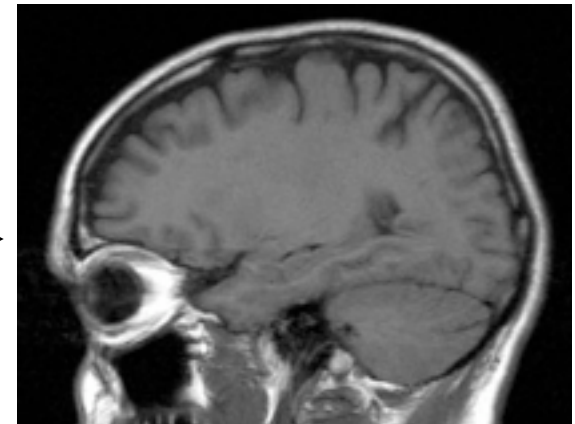
n_k : nombre de particules dans l'état k . Contient toute l'information (permet de reconstruire la fonction d'onde -à une phase près).

N particules discernables sans interactions

Cas des fermions et des bosons: subtil

◆ Représentation en nombres d'occupations

◆ Calcul grand canonique



Particules indiscernables: calcul canonique

$$Z_c(N) = \sum_{\text{etats}} e^{-\beta E(\text{etat})}$$

$$\text{Un état} = \{n_0, n_1, \dots\}$$

$$Z_c(N) = \sum_{n_0, n_1, \dots} e^{-\beta(n_0 \epsilon_0 + n_1 \epsilon_1 + \dots)} \delta_{N, n_0 + n_1 + \dots}$$

Contrainte qui corrèle les différents n_k

Particules indiscernables: calcul grand-canonique

$$Z_c(N) = \sum_{n_0, n_1, \dots} e^{-\beta(n_0 \epsilon_0 + n_1 \epsilon_1 + \dots)} \delta_{N, n_0 + n_1 + \dots}$$

$$Z_{gc}(\mu) = \sum_N Z_c(N) e^{\beta \mu N}$$

$$Z_{gc}(\mu) = \sum_{n_0, n_1, \dots} e^{-\beta(n_0 \epsilon_0 + n_1 \epsilon_1 + \dots)} e^{\beta \mu (n_0 + n_1 + \dots)}$$

$$Z_{gc}(\mu) = \sum_{n_0, n_1, \dots} e^{\beta n_0 (\mu - \epsilon_0)} e^{\beta n_1 (\mu - \epsilon_1)} \dots$$

$$Z_{gc}(\mu) = \left[\sum_{n_0} e^{\beta n_0 (\mu - \epsilon_0)} \right] \left[\sum_{n_1} e^{\beta n_1 (\mu - \epsilon_1)} \right] \dots$$

Calcul grand-canonique: fermions

$$\begin{aligned} Z_{gc}^F(\mu) &= \left[\sum_{n_0=0}^1 e^{\beta n_0 (\mu - \epsilon_0)} \right] \left[\sum_{n_1=0}^1 e^{\beta n_1 (\mu - \epsilon_1)} \right] \dots \\ &= \left[1 + e^{\beta (\mu - \epsilon_0)} \right] \left[1 + e^{\beta (\mu - \epsilon_1)} \right] \dots \end{aligned}$$

Thermo: $A = -\frac{1}{\beta} \log Z_{gc} = -\frac{1}{\beta} \sum_k \log \left[1 + e^{\beta (\mu - \epsilon_k)} \right]$

Distribution des nombres d'occupation:

$$P(n_0, n_1, \dots) = \frac{1}{Z_{gc}^F(\mu)} e^{\beta n_0 (\mu - \epsilon_0)} e^{\beta n_1 (\mu - \epsilon_1)} \dots$$

Calcul grand-canonique: fermions.

Facteur d'occupation

Distribution du nombre de particules dans l'état k :

$$P(n_k) = \frac{e^{\beta n_k (\mu - \epsilon_k)}}{1 + e^{\beta (\mu - \epsilon_k)}}$$

Facteur d'occupation de Fermi:

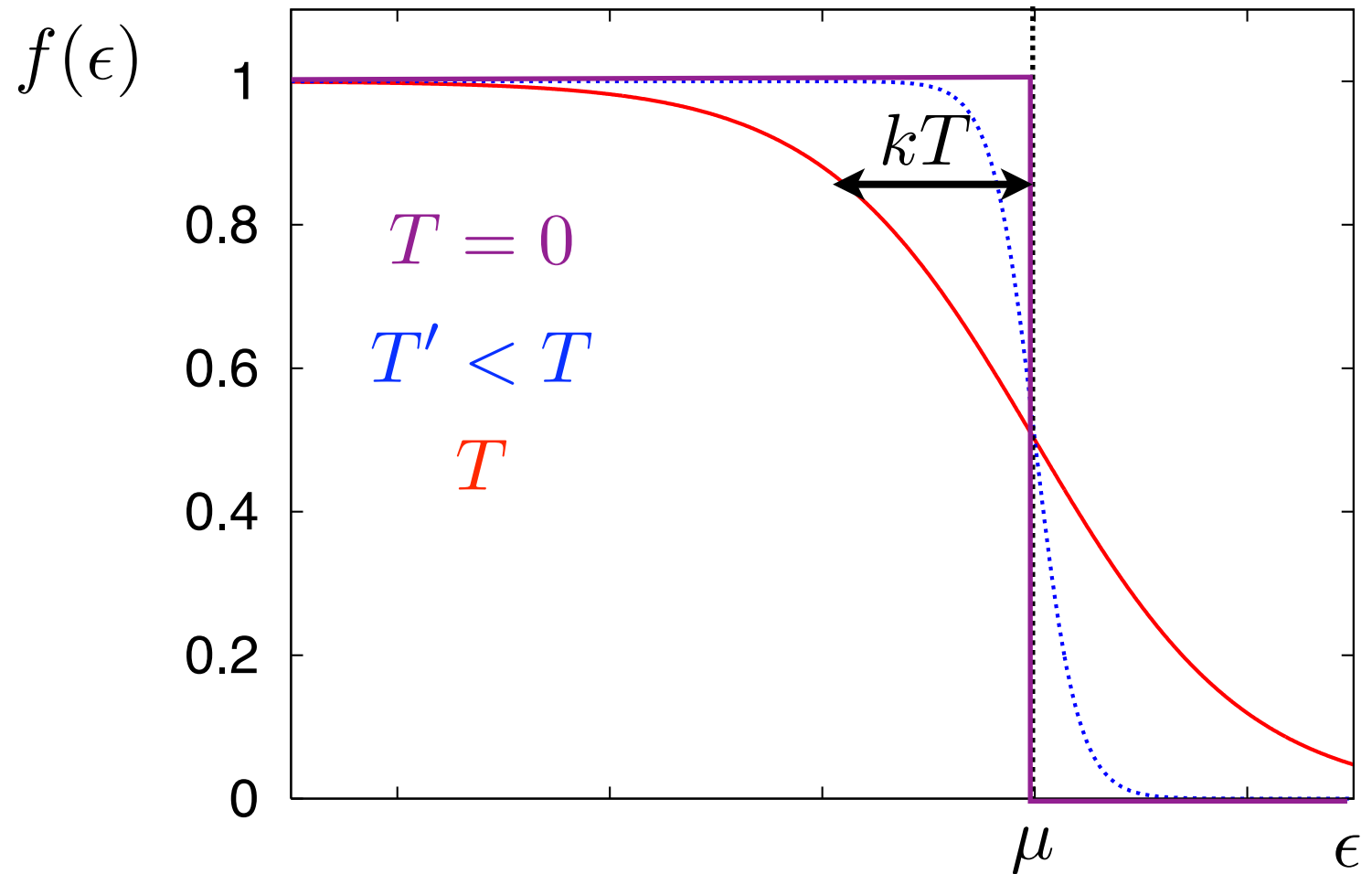
$$f_k = \langle n_k \rangle = \frac{1}{1 + e^{\beta (\epsilon_k - \mu)}}$$

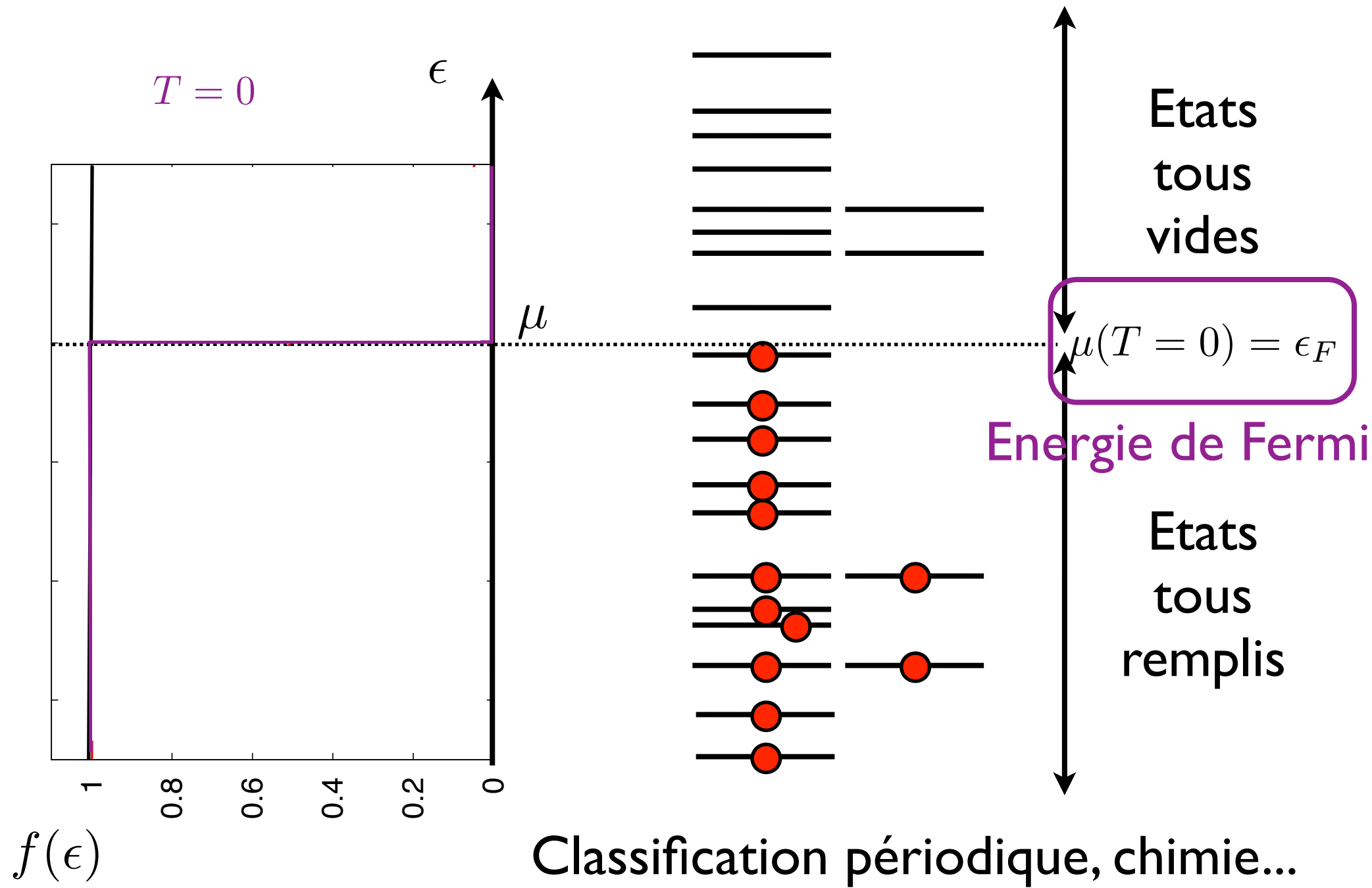
$$\langle N \rangle = \sum_k f_k$$

$$U = \langle E \rangle = \sum_k f_k \epsilon_k$$

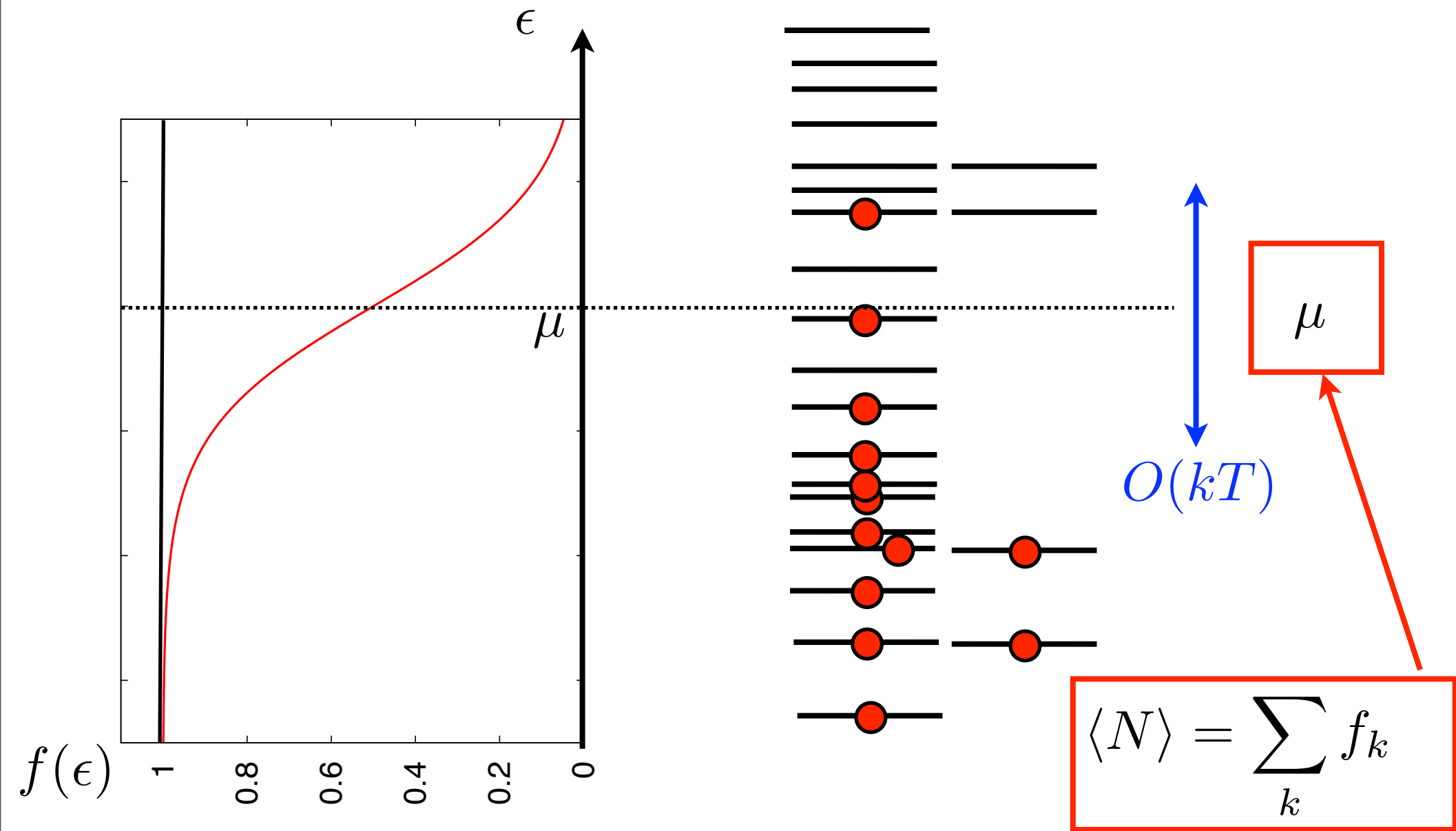
Facteur d'occupation de Fermi

$$f_k = \langle n_k \rangle = \frac{1}{1 + e^{\beta(\epsilon_k - \mu)}}$$



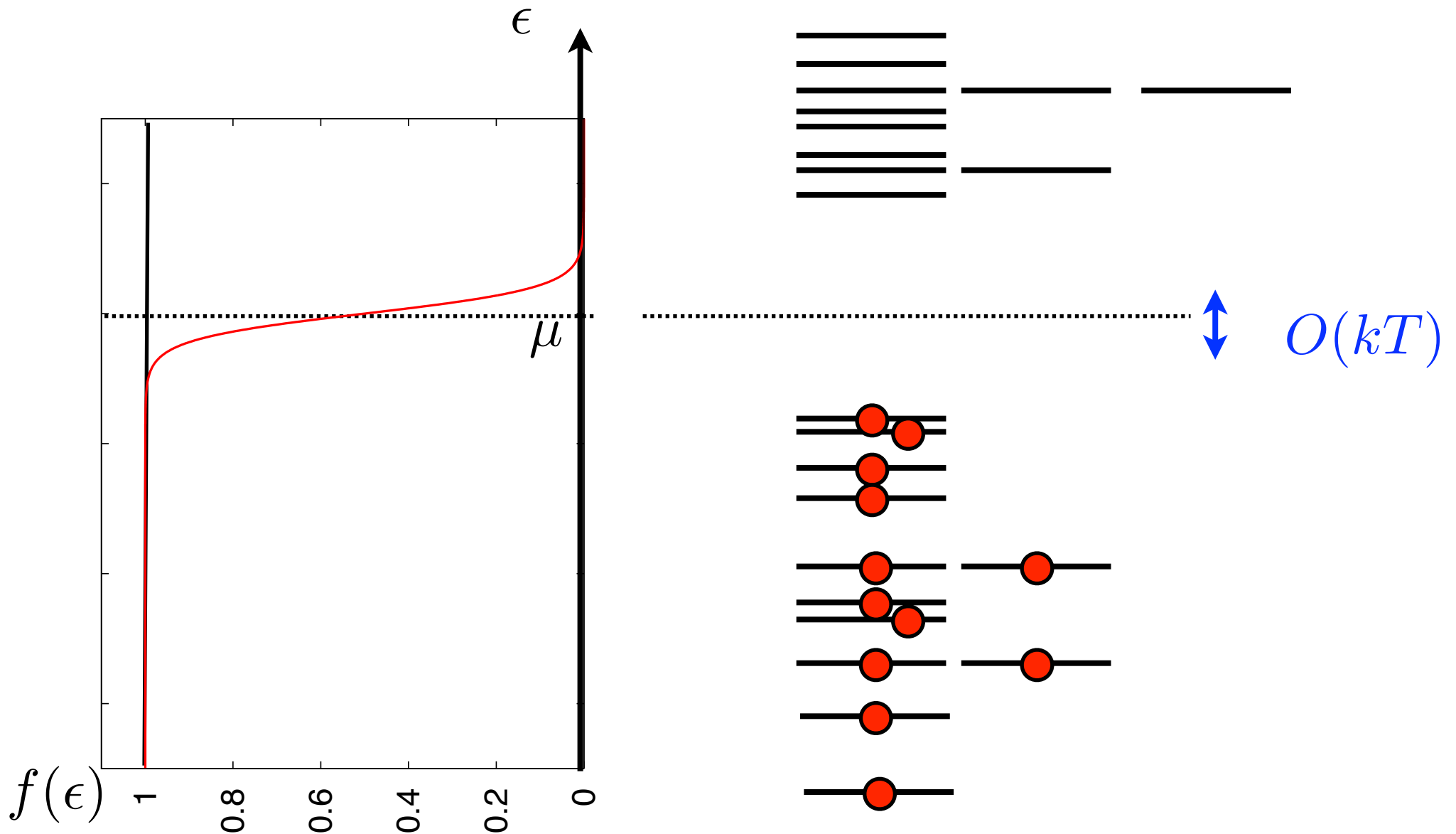


Fermions à $T = 0$: très loin du repos! Energie, pression...



Température finie: excitations possibles autour de

$$\epsilon \simeq \mu \pm O(kT)$$



“Gap” autour du niveau de Fermi: excitations très difficiles (isolant, isolant thermique, semiconducteur)

Physique: gouvernée par la densité d'états à $\mu(T = 0) = \epsilon_F$

Calcul grand-canonique: bosons

$$Z_{gc}^B(\mu) = \left[\sum_{n_0=0}^{\infty} e^{\beta n_0 (\mu - \epsilon_0)} \right] \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} e^{\beta n_1 (\mu - \epsilon_1)} \right] \dots$$
$$= \left[\frac{1}{1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_0)}} \right] \left[\frac{1}{1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_1)}} \right] \dots \quad \text{NB: } \mu < \epsilon_0$$

Thermo: $A = -\frac{1}{\beta} \log Z_{gc} = +\frac{1}{\beta} \sum_k \log \left[1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_k)} \right]$

Distribution des nombres d'occupation:

$$P(n_0, n_1, \dots) = \frac{1}{Z_{gc}^B(\mu)} e^{\beta n_0 (\mu - \epsilon_0)} e^{\beta n_1 (\mu - \epsilon_1)} \dots$$

Calcul grand-canonique: bosons.

Facteur d'occupation

Distribution du nombre de particules dans l'état k :

$$P(n_k) = \left[1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_k)} \right] e^{\beta n_k (\mu - \epsilon_k)} \quad \text{Exponentielle}$$

Facteur d'occupation de Bose:

$$f_k = \langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1}$$

$$\langle N \rangle = \sum_k f_k$$

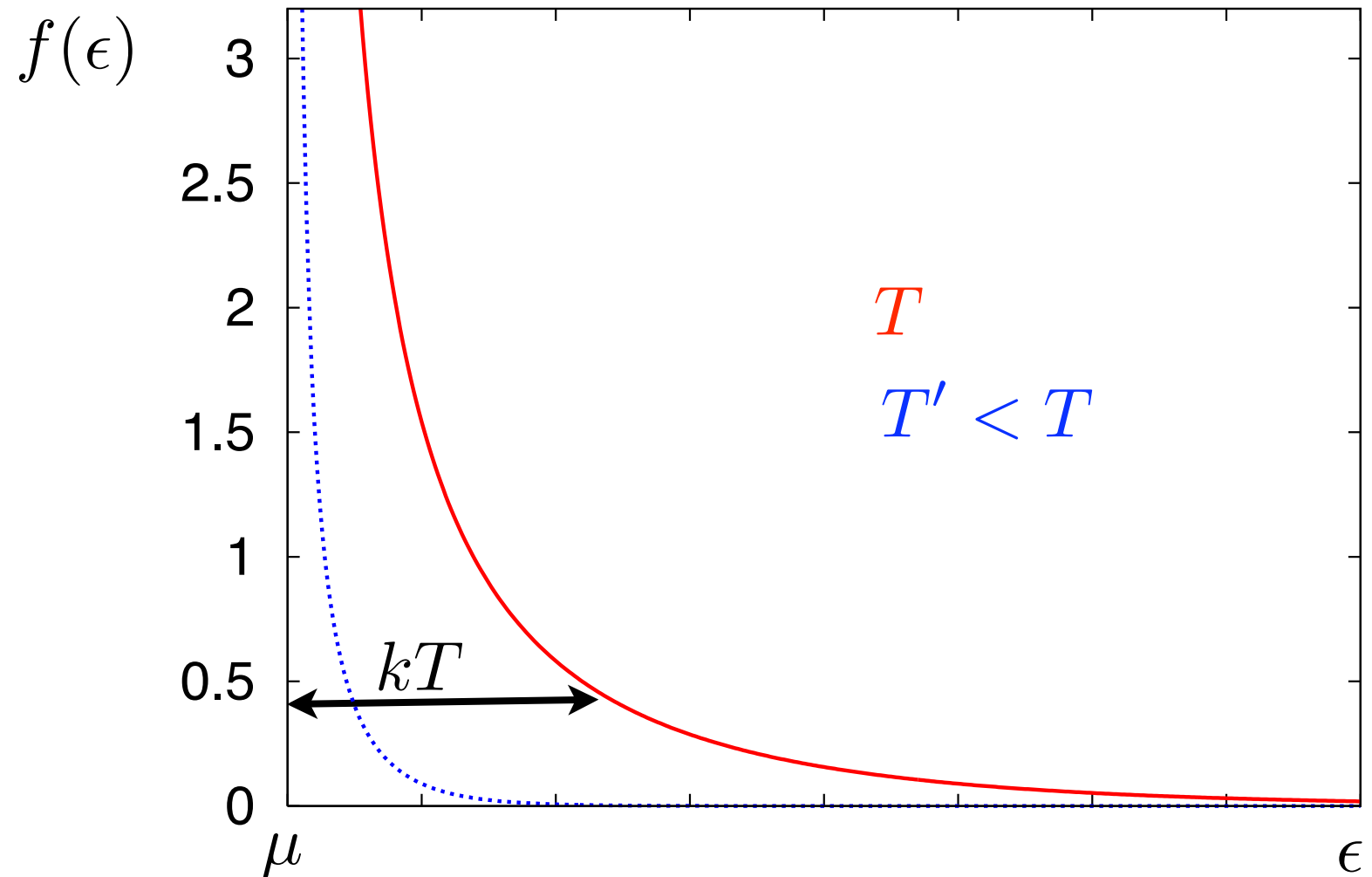
$$U = \langle E \rangle = \sum_k f_k \epsilon_k$$

NB: Rappel fermions:

$$f_k = \langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} + 1}$$

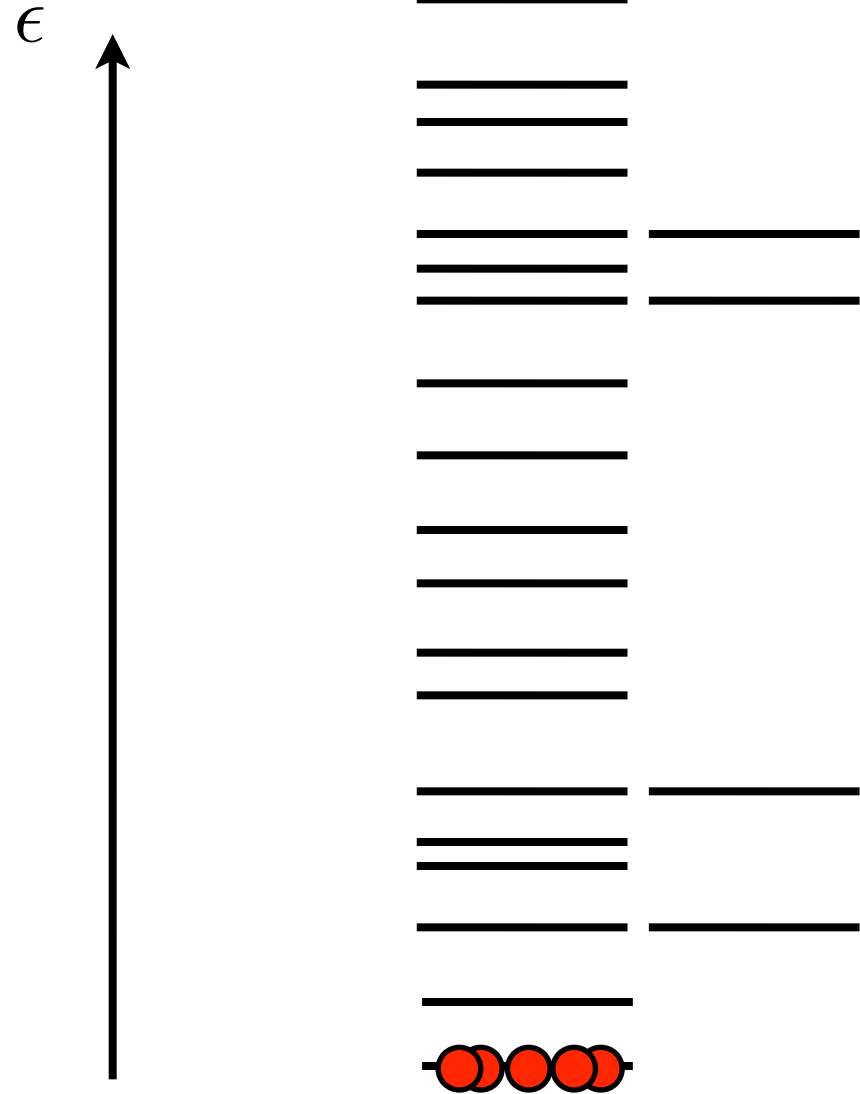
Facteur d'occupation de Bose

$$f_k = \langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1}$$

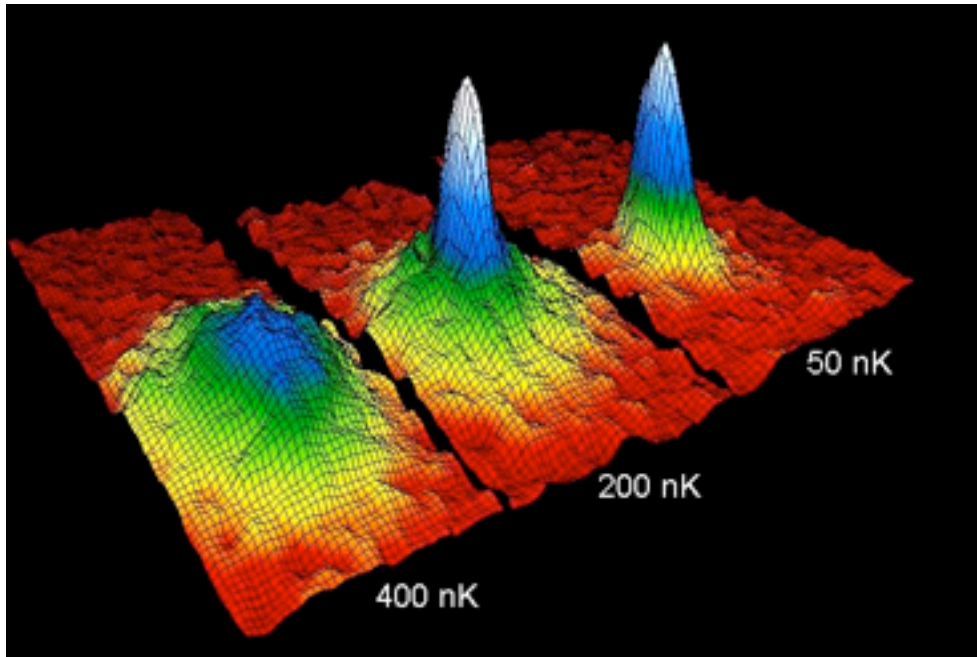


$$T = 0$$

Tous les
bosons
“condensés”
dans l’état
fondamental



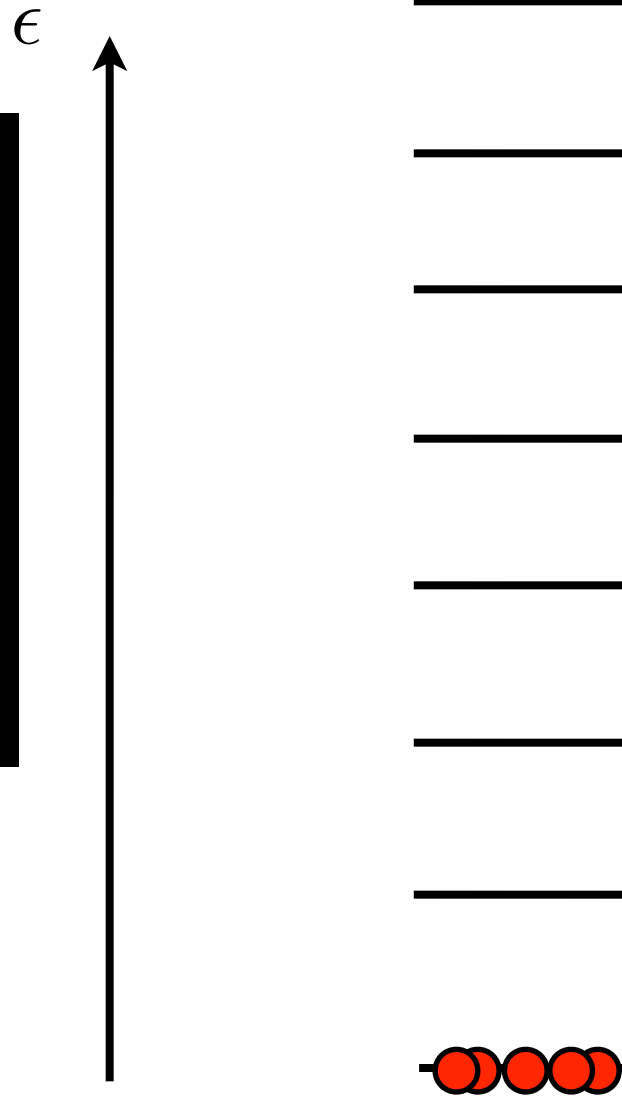
Nombre macroscopique de bosons tous dans le même état quantique! $\rightarrow$ Superfluidité, supraconductivité



Gaz de rubidium
ultra froid dans un
puits harmonique

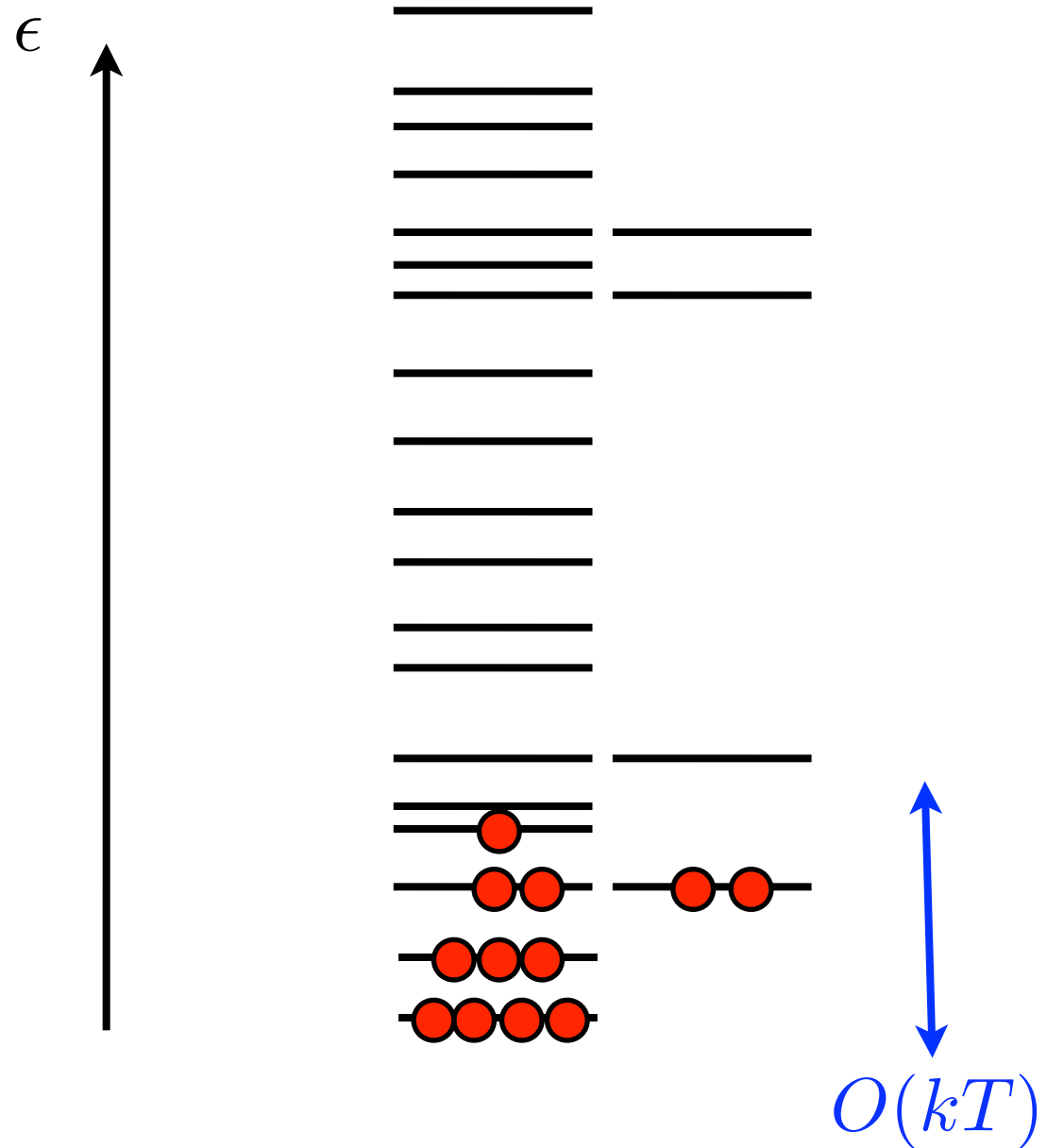
Etat fondamental:

$$|\psi_0(\vec{r})|^2 = C e^{-\vec{r}^2/a^2}$$



Physique conditionnée
par les états quantiques
au voisinage du
fondamental,

$$\epsilon_k - \epsilon_0 \sim kT$$



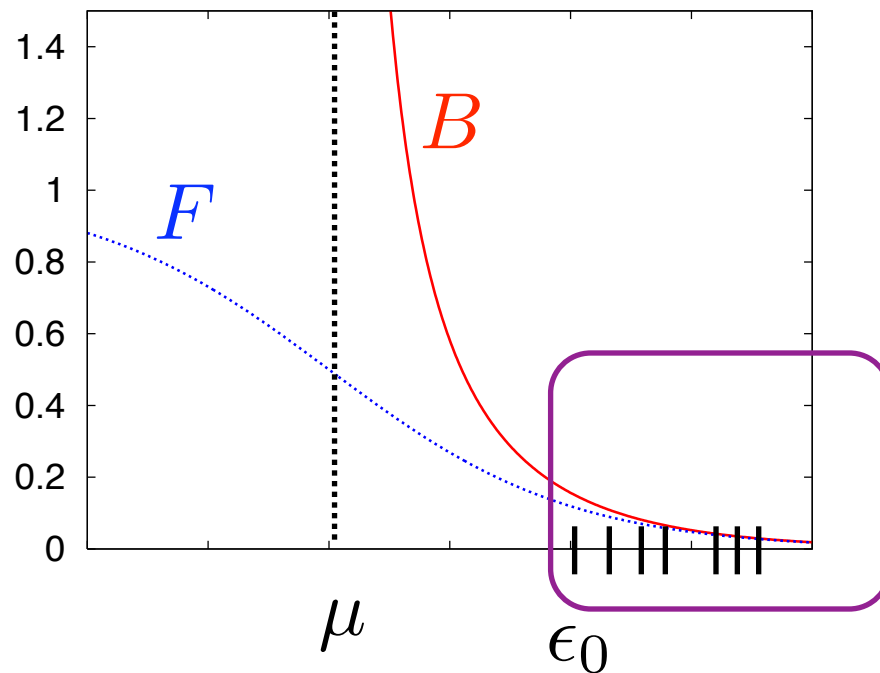
Transition de phase dans les systèmes d'atomes froids.

Limite classique des gaz quantiques

$$\epsilon_0 \leq \epsilon_1 \leq \epsilon_2 \dots$$

$$\epsilon_0 - \mu \gg kT$$

$$f_k = \langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} \pm 1} \simeq e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)} \quad \text{Boltzmann}$$



Limite classique

$$f_k \ll 1$$

Systèmes dilués

Plus aucune différence entre les bosons et les fermions.

Limite classique

$$\epsilon_0 \leq \epsilon_1 \leq \epsilon_2 \dots$$

$$\epsilon_0 - \mu \gg kT$$

$$f_k = \langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} \oplus 1} \simeq e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)} \quad \text{Boltzmann}$$

$$A^F = \ominus \frac{1}{\beta} \sum_k \log \left[1 \oplus e^{\beta(\mu - \epsilon_k)} \right] \simeq -\frac{1}{\beta} \sum_k e^{\beta(\mu - \epsilon_k)}$$

$$A^B = \oplus \frac{1}{\beta} \sum_k \log \left[1 \ominus e^{\beta(\mu - \epsilon_k)} \right] \simeq -\frac{1}{\beta} \sum_k e^{\beta(\mu - \epsilon_k)}$$

Plus aucune différence entre les bosons et les fermions.

Limite classique $\epsilon_0 - \mu \gg kT$

Plus aucune différence entre les bosons et les fermions.

Particules discernables:

$$A \simeq -\frac{1}{\beta} \sum_k e^{\beta(\mu - \epsilon_k)}$$

$$Z_c^D = \left[\sum_k e^{-\beta \epsilon_k} \right]^N$$

$$Z_{gc}^D = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta \mu N} \left[\sum_k e^{-\beta \epsilon_k} \right]^N = \sum_{N=0}^{\infty} \left[\sum_k e^{\beta(\mu - \epsilon_k)} \right]^N$$

$$A^D = -\frac{1}{\beta} \log Z_{gc}^D = -\frac{1}{\beta} \log \left[\frac{1}{1 - \sum_k e^{\beta(\mu - \epsilon_k)}} \right] \neq A$$

Limite classique $\epsilon_0 - \mu \gg kT$

Plus aucune différence entre les bosons et les fermions.

Particules indiscernables,
limite classique:

$$A \simeq -\frac{1}{\beta} \sum_k e^{\beta(\mu - \epsilon_k)}$$

$$Z_c^I = \left[\sum_k e^{-\beta \epsilon_k} \right]^N / N!$$

$$Z_{gc}^I = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta \mu N} \left[\sum_k e^{-\beta \epsilon_k} \right]^N / N! = \sum_{N=0}^{\infty} \left[\sum_k e^{\beta(\mu - \epsilon_k)} \right]^N / N!$$

$$A^I = -\frac{1}{\beta} \log Z_{gc}^I = A = \exp \left[\sum_k e^{\beta(\mu - \epsilon_k)} \right]$$

Limite classique $\epsilon_0 - \mu \gg kT$

Plus aucune différence entre les bosons et les fermions.

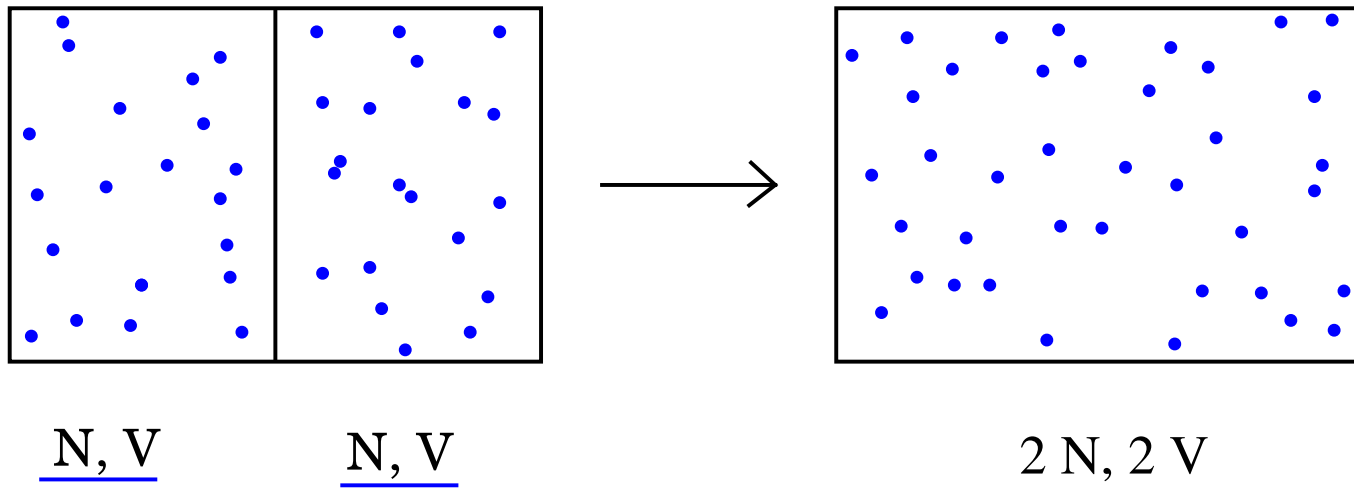
Particules indiscernables,
limite classique:

$$A \simeq -\frac{1}{\beta} \sum_k e^{\beta(\mu - \epsilon_k)}$$

$$Z_c^I = \left[\sum_k e^{-\beta \epsilon_k} \right]^N / N!$$

$$A^I = -\frac{1}{\beta} \log Z_{gc}^I = A$$

Cf la règle du gaz parfait classique, paradoxe de Gibbs etc...



Résumé des points importants

Pauli: $|\psi\rangle$ symétrique (b) ou antisymétrique (f)

représentation en nombres d'occupation $||n_0, n_1, n_2, \dots\rangle\rangle$

Facteur d'occupation: $f_k = \langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} \pm 1}$

$$\langle N \rangle = \sum_k f_k$$

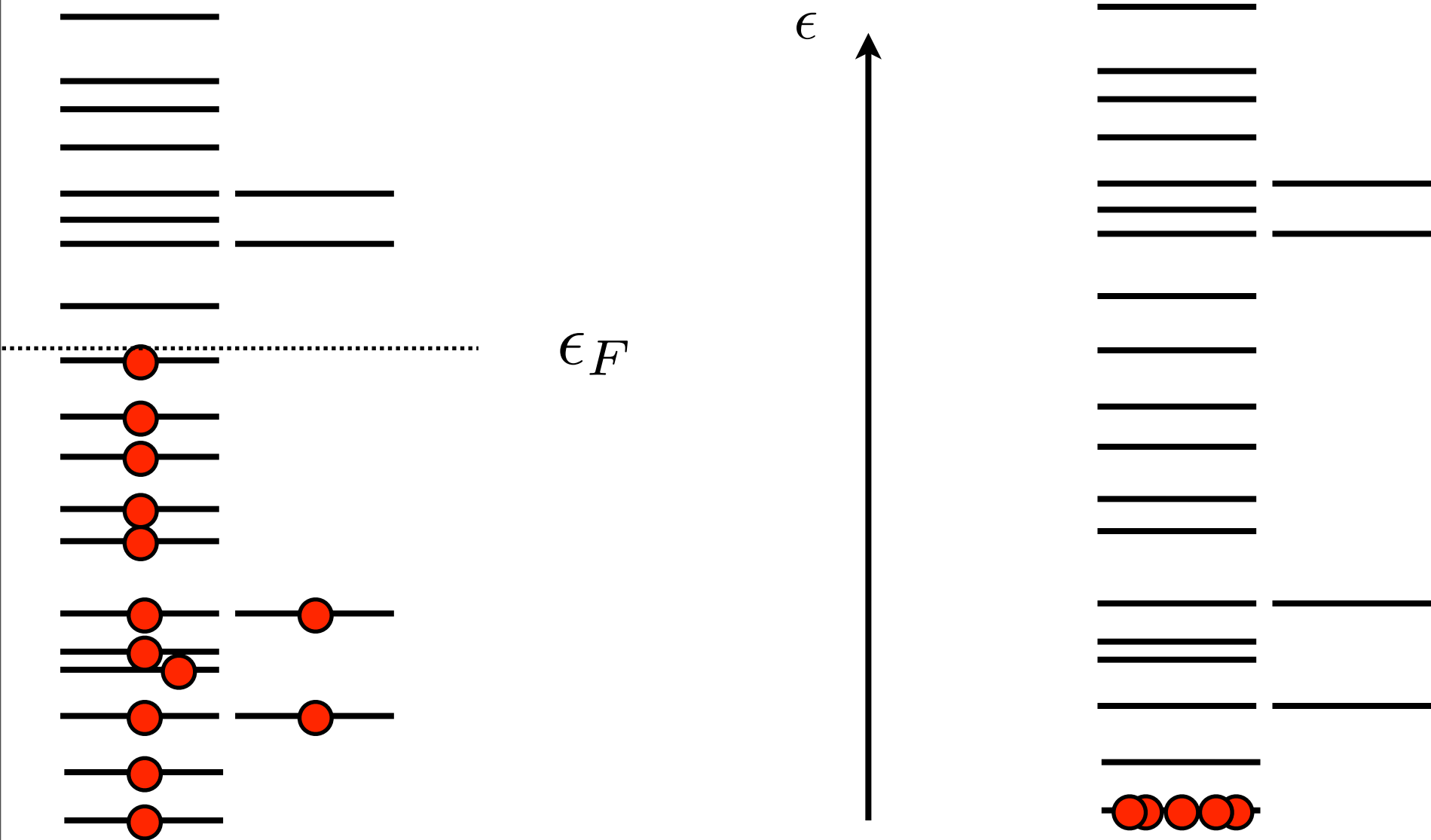
$$U = \langle E \rangle = \sum_k f_k \epsilon_k$$

(b: $-$; f: $+$)

Fermions

$$T = 0$$

Bosons



Comportements radicalement différents