

Physique Statistique, Amphi 9

J.P. Bouchaud

Plan du cours: Gaz parfaits quantiques

- I. Formalisme général

- Densité d'états ; Potentiel thermodynamique ; limite de haute température

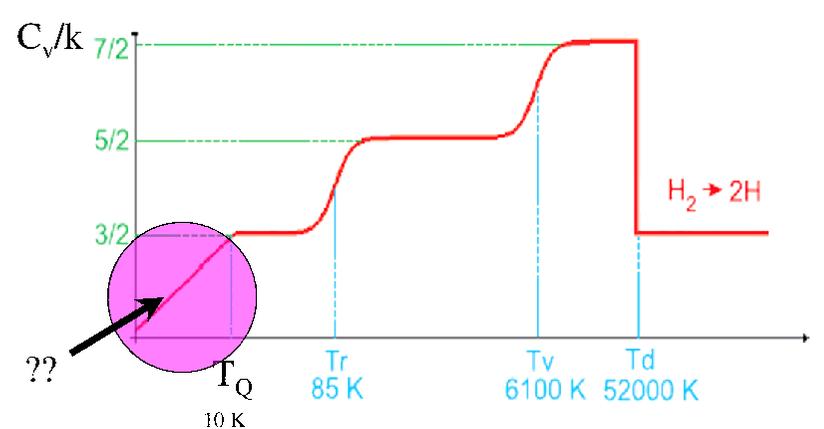
- II. Fermions

- La sphère de Fermi ; capacité calorifique ; applications

- III. Bosons

- La condensation de Bose-Einstein ; capacité calorifique ; applications

Pitch du cours



Que devient la capacité calorifique quand la **quantification de la translation** devient importante ?

Pitch du cours

- Critère de recouvrement des paquets d'ondes :
 - Distance entre particules: $d = \rho^{-1/3}$
 - Extension typique des paquets d'onde: $\Delta x \Delta p \sim h \longrightarrow \lambda_T = h / \sqrt{2\pi m k T}$
 - Effets quantiques: $\lambda_T \sim d$, ou encore: $\rho \lambda_T^3 \sim 1$

I. Formalisme général : Rappels

- Rappel: Fonction de partition grand canonique

$$\mathcal{Z}(\mu, T, V) = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\frac{\mu N}{kT}} Z_N$$

où Z_N est la fonction de partition à N particules

- \mathcal{Z} permet de calculer paramétriquement l'eq. d'état

$$pV(\mu) = kT \ln \mathcal{Z}; \quad \langle N \rangle(\mu) = kT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \mathcal{Z}$$

- Gaz parfait classique

$$Z_N = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda_T^3} \right)^N \Rightarrow \ln \mathcal{Z} = e^{\frac{\mu}{kT}} \left(\frac{V}{\lambda_T^3} \right) = \langle N \rangle$$

I. Formalisme général : Rappels

- Gaz parfait quantique: **nombre**s d'occupation $\{n_k\}$ – k est l'ensemble des nombres quantiques nécessaires à décrire un état à une particule

$$E = \sum_k n_k \epsilon_k; \quad N = \sum_k n_k$$

- **Bosons** (Spins entiers, sym.) : $n_k = 0, 1, 2, \dots, \infty$
- **Fermions** (Spins demi-entiers, antisym.) : $n_k = 0, 1$
- Fonction de partition à N fixé

$$Z_N = \sum_{\{n_k\}} \delta_{\sum_k n_k, N} e^{-[\beta \sum_k n_k \epsilon_k]}$$

I. Formalisme général : Fonction de partition

- Fonction de partition grand canonique

$$\mathcal{Z} = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\frac{\mu N}{kT}} \sum_{\{n_k\}} \delta_{\sum_k n_k, N} \exp \left[-\beta \sum_k n_k \epsilon_k \right]$$

- Dans l'ensemble grand canonique, les n_k sont **découplés** !

$$\sum_{\{n_k\}} \prod_k e^{\beta n_k (\mu - \epsilon_k)} = \prod_k \left[\sum_{n_k} e^{\beta n_k (\mu - \epsilon_k)} \right]$$

I. Formalisme général : Fonction de partition

- Bosons :

$$\mathcal{Z}_B = \prod_k \sum_{n_k=0}^{\infty} e^{\beta n_k (\mu - \epsilon_k)} = \prod_k \frac{1}{1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_k)}}$$

Pour que toutes les séries convergent, il faut que $\mu < \epsilon_k \forall k$.

- Fermions :

$$\mathcal{Z}_F = \prod_k \sum_{n_k=0}^1 e^{\beta n_k (\mu - \epsilon_k)} = \prod_k [1 + e^{\beta(\mu - \epsilon_k)}]$$

- Formule condensée:

$$pV = kT \ln \mathcal{Z}_{B,F} = \mp kT \sum_k \ln [1 \mp e^{\beta(\mu - \epsilon_k)}]$$

I. Formalisme général : Nombre d'occupation

- Nombre moyen de particules:

$$\langle N \rangle = kT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \mathcal{Z}_{B,F} = \sum_k \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} \mp 1}$$

- Nombre d'occupation moyen de l'état k :

$$f_k^{B,F} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} \mp 1}$$

- Observables :

$$\langle N \rangle = \sum_k f_k; \quad U = \langle E \rangle = \sum_k f_k \epsilon_k$$

I. Formalisme général : Densité d'états

- Trions les états en énergie et comptons le nombre d'états entre ϵ et $\epsilon + d\epsilon$

- Par définition la densité d'états en énergie est telle que

$$D(\epsilon)d\epsilon = \# \in [\epsilon, \epsilon + d\epsilon]$$

- Si $g(\epsilon)$ varie peu entre 2 niveaux successifs:

$$\sum_k g(\epsilon_k) \approx \int d\epsilon D(\epsilon)g(\epsilon)$$

- Approximation continue:

$$\langle N \rangle \approx \int d\epsilon D(\epsilon)f(\epsilon); \quad pV \approx \mp \int d\epsilon D(\epsilon) \ln [1 \mp e^{\beta(\mu - \epsilon)}]$$

I. Formalisme général : Densité d'états

- Calcul de la densité d'états pour des particules libres dans un cube $V = L^3$: voir PC
- **Resultat:** (pour des particules de spin s)

$$D(\epsilon) = (2s + 1)V \frac{(2m)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} \sqrt{\epsilon} \quad (\epsilon > 0)$$

- **Note:** En dimension d

$$D_d(\epsilon) \propto \epsilon^{\frac{d}{2}-1}$$

I. Formalisme général : Pression

- L'équation qui fixe la pression $pV = kT \ln \mathcal{Z}$:

$$pV = \mp kT (2s + 1) \frac{V(2m)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty d\epsilon \sqrt{\epsilon} \ln \left[1 \mp e^{\beta(\mu - \epsilon)} \right]$$

- Après une intégration par parties:

$$pV = \frac{2}{3} (2s + 1) \frac{V(2m)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon \times \sqrt{\epsilon}}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} \mp 1} \equiv \frac{2}{3} \langle E \rangle$$

- Relation toujours valable: Bosons, Fermions et particules classiques ($\langle E \rangle = \frac{3}{2} NkT$)

I. Formalisme général : Potentiel chimique

- L'équation qui fixe le nombre de particules s'écrit :

$$\langle N \rangle = (2s + 1)V \frac{(2m)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\sqrt{\epsilon}}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} \mp 1}$$

- Après changement de variables: $\epsilon = kTx$ on trouve donc:

$$\rho = \frac{\langle N \rangle}{V} = (2s + 1) \frac{(2mkT)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{e^{x - \beta\mu} \mp 1}$$

- ou encore, l'équation qui fixe μ :

$$I(\beta\mu) = \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{e^{x - \beta\mu} \mp 1} = \frac{\sqrt{\pi}}{4s + 2} \rho \lambda_T^3$$

I. Formalisme général : Hautes températures

- Lorsque $T \rightarrow \infty$, $\lambda_T \rightarrow 0$:

$$I(\beta\mu) = \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{e^{x-\beta\mu} \mp 1} = \frac{\sqrt{\pi}}{4s+2} \rho \lambda_T^3 \rightarrow 0$$

- Il faut donc que $\beta\mu \rightarrow -\infty$

- Dans cette limite,

$$I(\beta\mu) \approx \int_0^\infty dx \sqrt{x} e^{-x+\beta\mu} [1 \pm e^{-x+\beta\mu}] \approx e^{\beta\mu} \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 \pm 2^{-3/2} e^{\beta\mu}]$$

- A l'ordre dominant:

$$e^{\beta\mu} = \frac{1}{2s+1} \rho \lambda_T^3 \rightarrow N = (2s+1) e^{\frac{\mu}{kT}} \left(\frac{V}{\lambda_T^3} \right) \quad \checkmark$$

I. Formalisme général : Hautes températures

- On peut effectuer le même développement pour la pression
- Le résultat à l'ordre $\rho\lambda_T^3$ est, tous calculs faits :

$$pV = NkT \left[1 \mp \frac{1}{2^{5/2}(2s+1)} \rho\lambda_T^3 \right]$$

- Bosons, signe $-$: la pression est abaissée par la statistique quantique \leftarrow attraction effective entre particules
- Fermions, signe $+$: la pression est augmentée par la statistique quantique \leftarrow repulsion de Pauli

I. Formalisme général : Interactions

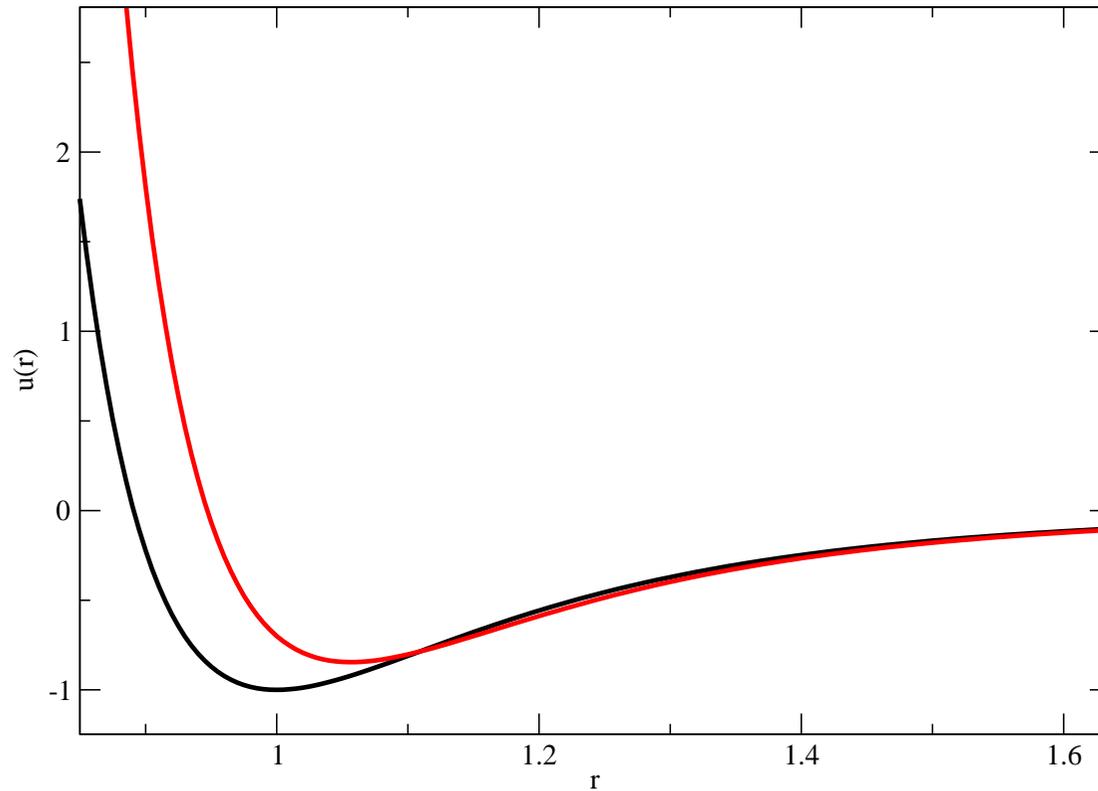
- Formellement, la correction précédente à pV est d'ordre \hbar^3
- En présence d'interactions, il existe des corrections à l'ordre \hbar^2 (Wigner, Uhlenbeck – 1932)

- Tout se passe comme si l'interaction était modifiée:

$$u(r) \longrightarrow u_{eff}(r) = u(r) + \frac{\hbar^2}{12mkT} \left\{ u''(r) - \frac{1}{2kT} [u'(r)]^2 \right\} + \dots$$

- Le confinement d'une particule quantique ($u'' > 0$) augmente son énergie cinétique.
- La correction dépend de la masse m : deux isotopes (He^3/He^4 , H_2/D_2) ne “voient” pas le même environnement

Corrections quantiques et potentiel effectif



Correction (en rouge) au potentiel de Lennard-Jones (en noir)

I. Formalisme général : conclusions

- A haute température, la différence entre fermions et bosons s'estompe:

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} \mp 1} \longrightarrow e^{\beta\mu} e^{-\beta\epsilon} \ll 1$$

on retrouve le poids de Boltzmann

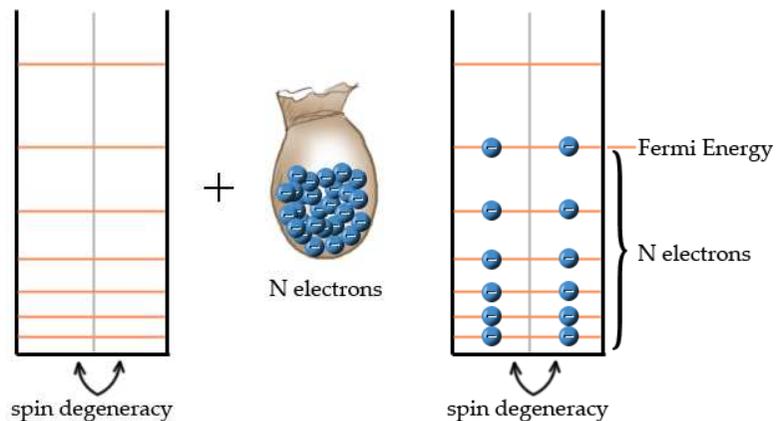
- Mais à basse température, la différence entre fermions et bosons se fait sentir de manière spectaculaire

II. Fermions à température nulle

- Limite de température nulle du nombre d'occupation



$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \xrightarrow{T \rightarrow 0} \Theta(\epsilon_F - \epsilon) \quad \epsilon_F \equiv \mu(T = 0)$$



- Tous les niveaux à l'intérieur de la sphère de Fermi sont occupés
- Tous ceux qui sont à l'extérieur sont vides

II. Fermions à température nulle

- Etat fondamental de N fermions libres: fonction d'onde dans l'espace réel

$$\Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \begin{vmatrix} \phi_{\vec{k}_1}(\vec{r}_1) & \phi_{\vec{k}_2}(\vec{r}_1) & \dots & \phi_{\vec{k}_N}(\vec{r}_1) \\ \phi_{\vec{k}_1}(\vec{r}_2) & \phi_{\vec{k}_2}(\vec{r}_2) & \dots & \phi_{\vec{k}_N}(\vec{r}_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{\vec{k}_1}(\vec{r}_N) & \phi_{\vec{k}_2}(\vec{r}_N) & \dots & \phi_{\vec{k}_N}(\vec{r}_N) \end{vmatrix}$$

(Determinant de Slater)

- Avec: $\phi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

- $|\vec{k}_1| < k_F, |\vec{k}_2| < k_F, \dots, |\vec{k}_N| < k_F; \quad \epsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}.$

II. Fermions à température nulle

- Gaz parfait classique: aucune corrélation entre particules

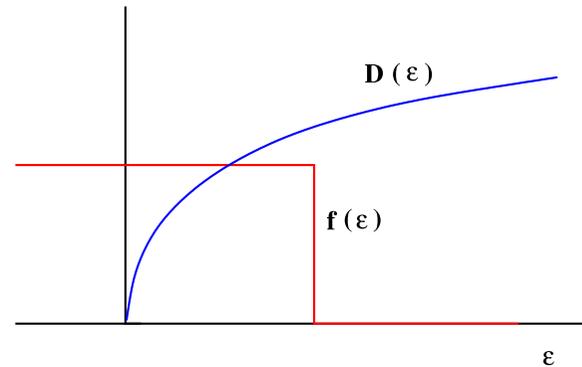
$$p(\vec{r}|\vec{r}_1 = \vec{0})d^3\vec{r} = \rho d^3\vec{r}$$

- Gaz parfait de fermions: corrélations à longue portée !

$$p(\vec{r}|\vec{r}_1 = \vec{0})d^3\vec{r} = \rho g(r) d^3\vec{r}, \quad g(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{\cos^2(k_F r)}{r^4}$$

II. Fermions à température nulle

- Comment fixer $\mu(T = 0) = \epsilon_F$?



$$N = \int_0^{\infty} d\epsilon D(\epsilon) f(\epsilon) = N_{<}(\epsilon_F)$$

- ou encore, pour $s = 1/2$ et $d = \rho^{-1/3}$:

$$N = 2V \frac{(2m)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} \frac{2}{3} \epsilon_F^{3/2} \rightarrow \epsilon_F = (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2md^2} \quad k_F = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{d}$$

Note: $\epsilon_F = kT_F$ définit la *Température de Fermi*

II. Fermions à température nulle: pression

- Energie :

$$U(T = 0) = \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon D(\epsilon)\epsilon = 2V \frac{(2m)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} \frac{2}{5} \epsilon_F^{5/2}$$

- On en déduit

$$\frac{U(T = 0)}{N} = \frac{3}{5} \epsilon_F$$

- Et surtout :

$$p = \frac{2U}{3V} = A \frac{\hbar^2}{2md^5} \propto \frac{\epsilon_F}{d^3} \propto \rho^{5/3}$$

- La pression reste finie à $T = 0$ et croît plus vite que ρ

II. Fermions à température nulle: applications

- Electrons de conduction dans le sodium

$$\rho = 2.5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \longrightarrow T_F = 36\,000\text{K} \quad v_F = \frac{\hbar k_F}{m} = 10^6 \text{ m/s}$$

Donc: $T_F \gg T = 300\text{K}$

- Etoiles à neutrons: masse similaire au soleil – Stabilité: **compétition entre énergie gravitationnelle et pression de Fermi:**

$$U_F \propto \rho^{2/3} \propto R^{-2} \quad E_G \propto MR^{-1} \longrightarrow R^* \sim 10\text{km}$$

Pour un tel rayon, on trouve:

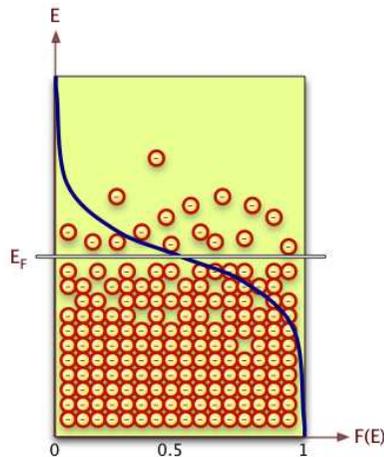
$$T_F \sim 10^{12}\text{K} \gg T \sim 10^8\text{K}$$

et $\rho \sim 3 \cdot 10^{15}$ par Angström cube !!

II. Fermions à basse température

- Lorsque la température est non nulle mais $T \ll T_F$, $f(\epsilon)$ n'est significativement différent de 1 ou de 0 que dans **une fine zone autour de ϵ_F** , de largeur kT :

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \epsilon_F)} + 1} \neq \Theta(\epsilon_F - \epsilon) \Rightarrow |\epsilon - \epsilon_F| \ll kT$$



Pour construire les excitations de faible énergie du système: on prend un fermion juste **en dessous** de ϵ_F et on l'amène juste **au dessus** de ϵ_F

II. Fermions à basse température

- En utilisant les équations qui fixent μ et $\langle E \rangle$, et la petite différence entre $f(\epsilon)$ et $\Theta(\epsilon_F - \epsilon)$, on peut calculer les propriétés thermodynamiques du système en puissance de T/T_F (développement dit de Sommerfeld):

$$\frac{1}{N} \langle E \rangle = \epsilon_F \left[\frac{3}{5} + a_2 \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + a_4 \left(\frac{T}{T_F} \right)^4 + \dots \right]$$

- **Interprétation:**
 - Une fraction $\sim kT/\epsilon_F$ des particules sont dans un état excité
 - L'énergie en excès par particule excitée est aussi kT
 - $\rightarrow \delta E \propto N \times (kT/\epsilon_F) \times kT$

II. Fermions à basse température

- Résultat:

$$\frac{1}{N}\langle E \rangle = \epsilon_F \left[\frac{3}{5} + a_2 \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + a_4 \left(\frac{T}{T_F} \right)^4 + \dots \right]$$

- On en déduit que la capacité calorifique d'un gaz parfait de fermions est **linéaire en T** quand $T \rightarrow 0$:

$$c_v = \frac{d}{dT} \frac{\langle E \rangle}{N} = \frac{\pi^2}{2} k \frac{T}{T_F}$$

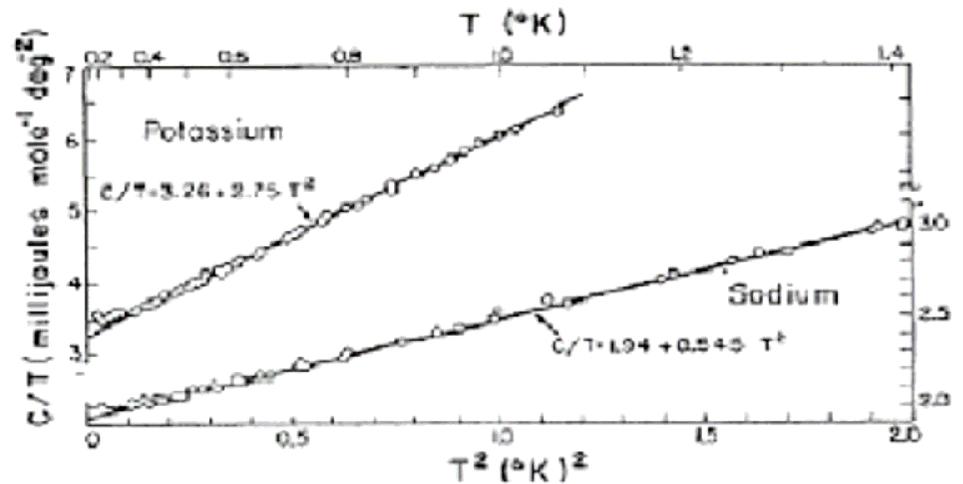
- Note: $c_v \propto m\rho^{2/3}$

II. Fermions à basse température

- Théorie:

$$c_v/kT = \frac{\pi^2}{2T_F} + O(T^2)$$

- Expérience: electrons de conduction dans les métaux (Sodium, Potassium) – les autres degrés de liberté donnent une contribution négligeable qd $T \rightarrow 0$
- c_v/T est bien linéaire en T^2 avec une ordonnée à l'origine du bon ordre de grandeur mais 30 – 50% trop grande (?)



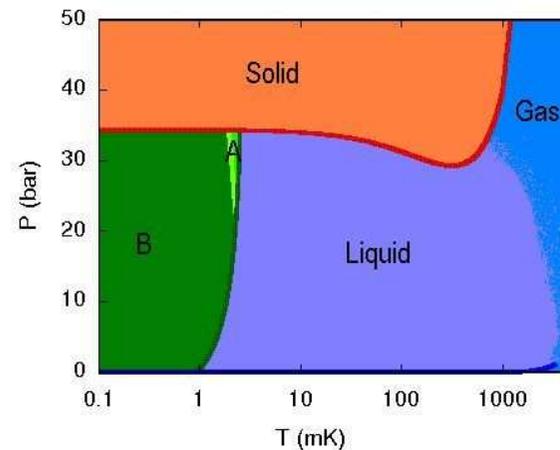
II. Fermions à basse température : Entropie

- De même, on trouve que

$$S(T \rightarrow 0) = \frac{\pi^2}{2} k \frac{T}{T_F}$$

- Note: cette entropie devient plus faible que $k \ln 2$ quand $T \rightarrow 0$ – les spins acquièrent de très fortes corrélations anti-ferromagnétiques induites par le principe de Pauli

Application: l'entropie du solide He^3 (spin 1/2) devient plus grande que celle du liquide: le solide fond quand on le refroidit ! (effet Pomeranchuk)



II. Fermions : Théorie de Landau

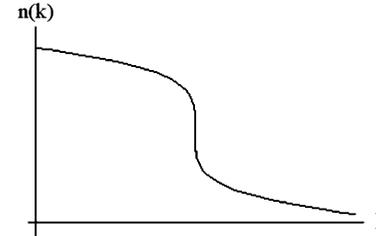
- La théorie des gaz parfaits de fermions est **particulièrement importante** parce qu'elle est *structurellement stable*
- L. Landau a compris en 1952 que même en présence d'interactions fortes, les excitations de basse énergie d'un liquide de Fermi sont des '**quasi-particules**' autour de la surface de Fermi qui interagissent faiblement



II. Fermions : Théorie de Landau

- La distribution des impulsions à température nulle garde une

discontinuité à k_F , d'amplitude $Z < 1$



- La masse des quasi-particules est augmentée par les interactions $m \rightarrow m^* = m/Z$
- La chaleur spécifique reste linéaire en température $c_v \rightarrow c_v/Z$
- Explique la différence observée du c_v des métaux
- L' He^3 liquide est très fortement corrélé, mais ses propriétés sont bien expliquées par la théorie avec $Z = 3 \rightarrow 6$!

III. Bosons à basse température : surprise

- Nombre d'occupation :

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} \quad \mu < 0$$

- L'équation qui fixe μ est:

$$\langle N \rangle = (2s + 1)V \frac{(2m)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\sqrt{\epsilon}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}$$

- Après changement de variables: $\epsilon = kTx$ on trouve donc, pour $s = 0$:

$$\rho = \frac{\langle N \rangle}{V} = \frac{(2mkT)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{e^{x+\beta|\mu|} - 1}$$

III. Bosons à basse température : surprise

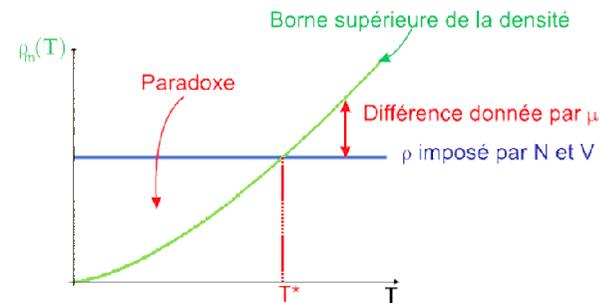
- Or $\mu < 0 \rightarrow e^{x+\beta|\mu|} > e^x$, et donc

$$\int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{e^{x+\beta|\mu|} - 1} < \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} = \Gamma(3/2)\zeta(3/2) \approx 2.31..$$

- On trouve donc une **borne supérieure sur ρ** :

$$\rho < \rho_{\max}(T) = 2.31.. \frac{(2mkT)^{3/2}}{4\pi^2\hbar^3} \equiv \rho \left(\frac{T}{T^*} \right)^{3/2}$$

A ρ fixé, $\mu < 0$ compense la différence quand $T > T^*$, mais que se passe-t'il quand $T < T^*$??



III. Bosons à basse température : surprise

- $T = T^*$ correspond à $\rho\lambda_T^3 = 2.61..$
- Pour $T < T^*$, la densité imposée ρ devient supérieure à la valeur maximale théorique: **Paradoxe !**
- **Où sont les bosons manquants ?**
- Resolution du paradoxe: **la condensation de Bose-Einstein** (Einstein 1924) – une transition de phase dans un système sans interactions



III. Bosons à basse température : condensation

- Le paradoxe oblige à revenir sur certaines approximations
- **Le coupable:** passage au continu et densité d'états quand $\epsilon \rightarrow 0$:

$$N_{<}(\epsilon \rightarrow 0) \propto \epsilon^{3/2} \rightarrow 0$$

- Le passage au continu fait donc “disparaître” l'état fondamental $\epsilon_0 = 0$, or lorsque $\mu \rightarrow 0$ c'est l'état le plus peuplé:

$$f_0 = \langle n_0 \rangle \approx \frac{1}{\epsilon_0 - \mu} \rightarrow \infty$$

III. Bosons à basse température : condensation

- Résolution du paradoxe: une fraction finie φ de particules “condensent” dans l’état fondamental

$$\rho = \varphi(T) \rho + \rho_{\max}(T); \quad \rho_{\max}(T) = \rho \left(\frac{T}{T^*} \right)^{3/2}$$

- La fraction condensée est donc donnée par:

$$\varphi(T) = 1 - \left(\frac{T}{T^*} \right)^{3/2}; \quad \varphi(T \rightarrow 0) \rightarrow 1, \quad \varphi(T \rightarrow T^*) \rightarrow 0$$

III. Bosons à basse température : condensation

- Remarque 1: La “condensation” se fait dans l’espace des impulsions, sur l’état d’impulsion nulle $\vec{k} = 0 \rightarrow$

Une fraction macroscopique de particules sont partout à la fois ! (\sim superfluidité)

- Remarque 2: Quid des états très proches du fondamental ?

– Réponse: $\mu \approx -\frac{1}{\varphi N} \rightarrow 0$

– Occupation des états proche du fondamental:

$$f_0 = \varphi N; \quad f_1 \approx \frac{1}{\epsilon_1 - \mu} \propto N^{2/3} \ll N$$

III. Bosons à basse température : thermodynamique

- A $T = 0$, $f_0 = N$ et $U = 0$
- Pour $T \ll T^*$, une fraction $1 - \varphi = \left(\frac{T}{T^*}\right)^{3/2}$ de particules possèdent une énergie $\sim kT$

$$U \sim N \times \left(\frac{T}{T^*}\right)^{3/2} \times kT \propto VT^{5/2} \quad (T^{*3/2} \propto \rho)$$

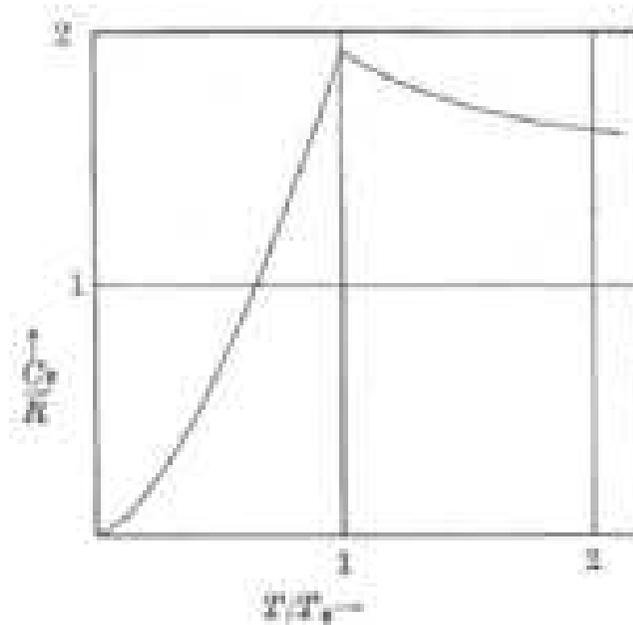
- Conséquences:

– La pression dépend de T mais pas de ρ !

$$pV = \frac{2}{3}U \propto VT^{5/2} \longrightarrow p \propto T^{5/2}$$

– La capacité calorifique se comporte en $T^{3/2}$

III. Bosons à basse température: capacité calorifique

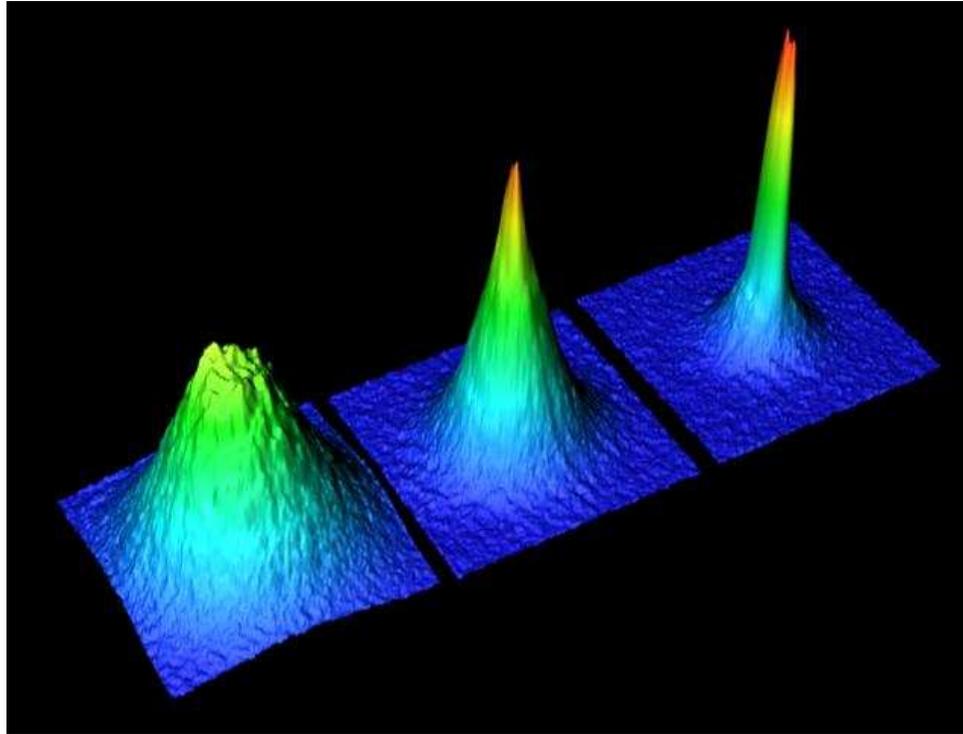


La capacité calorifique est discontinue à T^* : transition du troisième ordre

III. Condensation de Bose-Einstein : observation ?

- Superfluidité de l'Helium 4 liquide; une manifestation de la condensation ? (London 1937)
 - Pour : Comparaison He^4/He^3 ; $T_\lambda = 2.17 \text{ K} \simeq T^* = 3.6 \text{ K}$; cohérence quantique macroscopique
 - Contre : Transition du second ordre: $c_v(T_\lambda) \rightarrow \infty$; $c_v \propto T^3 \neq T^{3/2}$
- L'Helium 4 liquide est en interaction forte

III. Condensation de Bose-Einstein: gaz dilués

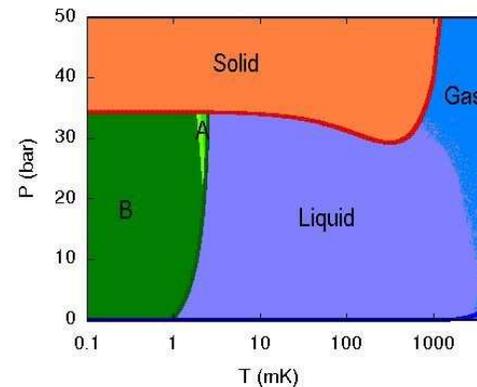


Densités 10^{-9} plus faibles \Rightarrow températures 10^{-6} plus basses
(1995)

Extensions

- **Supraconductivité des métaux** – mais les électrons sont des fermions !?
 - **Fermion + fermion = boson** : possibilité de condensation des paires de fermions
 - Formation de paires médiée par les **phonons** du réseau cristallin et **instabilité de la surface de Fermi** (BCS, 1958)

- Phases superfluides de l' He^3 !



Extensions

- Découverte récente (2004): superfluidité de l'Helium 4 solide
(??): le "supersolide"

Résumé

- Indiscernabilité quantique = interaction effective

- Haute température – $pV = NkT \left[1 \mp \frac{1}{2^{5/2}(2s+1)} \rho \lambda_T^3 \right]$

- Basse température

- **Fermions**: Notion de sphère de Fermi,

- $p \propto \rho^{5/3}$ indep. de T

- **Bosons**: Notion de condensation de Bose-Einstein,

- $p \propto T^{5/2}$ indep. de ρ

Résumé: capacité calorifique

