Licence PMCC S3 — Université Paris-Sud XI
Année 2013-2014

TD de cinématique du point

Exercices de cours

☞ **Vitesse et accélération en coordonnées sphériques:** Montrer les formules suivantes en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi \\
\vec{a} &= [\ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta)]\,\vec{e}_r \\
&+ [2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta]\,\vec{e}_\theta \\
&+ [2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta]\,\vec{e}_\varphi
\end{aligned}$$

☞ **Mouvement circulaire:** On étudie un mouvement circulaire, dans les coordonnées cylindriques, confiné dans un plan orthogonal à $\vec{e}_z$. On introduit le vecteur rotation $\vec{\omega} = \omega\,\vec{e}_z$ tel que $\omega(t) \equiv \dot{\theta}(t)$.

1. Montrer que
$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{a} = \vec{\omega} \wedge \vec{v} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r}\,.$$
2. Représenter les vecteurs position, vitesse et accélération sur un même schéma.
3. Discuter le cas particulier d'un mouvement uniforme.

☞ **Mouvement à accélération centrale, formules de Binet:** Le mouvement à accélération centrale est tel que son vecteur accélération $\vec{a}$ pointe toujours vers un même point noté O, pris comme origine. On peut donc écrire à tout instant t la relation $\vec{r} \wedge \vec{a} = \vec{0}$. Soit le vecteur $\vec{C} = \vec{r} \wedge \vec{v}$.

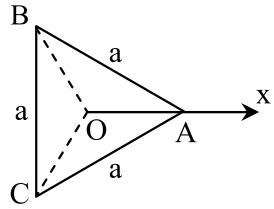
1. Montrer que $\vec{C}$ est constant au cours du mouvement. En déduire que le mouvement est plan.
2. En se plaçant en coordonnées cylindriques, montrer que $\vec{C} = \rho^2 \dfrac{d\theta}{dt}\vec{e}_z$.
3. On cherche à éliminer la variable t des équations. Montrer les deux formules de Binet
$$v^2 = C^2\left[\frac{1}{\rho^2} + \left(\frac{d}{d\theta}\frac{1}{\rho}\right)^2\right] \quad \text{et} \quad \vec{a} = -\frac{C^2}{\rho^2}\left[\frac{1}{\rho} + \frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{\rho}\right]\vec{e}_\rho\,.$$

☞ **Référentiels tournant autour d'un axe commun:** On considère le mouvement d'un point M dans un référentiel $\mathcal{R}$. Soit $\mathcal{R}'$ le référentiel tel que $O' = O$ et $Oz = Oz'$, en rotation par rapport à $\mathcal{R}$, et tel que le point M soit contenu à tout instant dans le plan $O'x'z'$. On note $\theta(t)$ l'angle de rotation.

1. Rappeler l'expression de $\vec{r}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$ dans $\mathcal{R}$ en coordonnées cylindriques.
2. Comparer les bases $(\vec{e}\,'_x, \vec{e}\,'_y, \vec{e}\,'_z)$ et $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, puis exprimer $\vec{r}\,'$, $\vec{v}\,'$ et $\vec{a}\,'$ dans $\mathcal{R}'$.
3. Calculer le vecteur instantané de rotation $\overrightarrow{\omega}_e$ de $\mathcal{R}'/\mathcal{R}$ à l'aide des formules du cours.
4. En déduire la vitesse d'entraînement, l'accélération d'entraînement et l'accélération de Coriolis dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. Identifier alors les termes dans les résultats de la question 1.

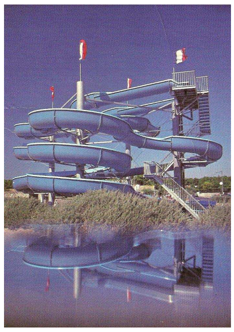
Les trois chiens

On considère trois chiens non alignés A, B et C, à la même distance a les uns des autres à l'instant initial (figure ci-contre). Le chien A court constamment vers le chien B, B vers C, et C vers A, avec des vitesses de normes constantes et toutes égales à v.



1. a) Représenter qualitativement les positions successives des points au cours du temps.
   b) Quelles bases locales sont bien adaptées à la description du mouvement ? Les représenter.
   c) Justifier que la connaissance du mouvement de A est suffisante pour en déduire celle des autres.
2. a) Écrire l'expression de la vitesse instantanée du chien A.
   b) Établir les équations différentielles du mouvement.
   c) Les résoudre en posant $\tau = \dfrac{2a}{3v}$.
   d) Quelle est l'équation de la trajectoire (en éliminant la variable t) ?
3. Au bout de quel temps T et en quelle position les chiens se rencontrent-ils ?
   Quelle distance $\mathcal{L}$ auront-ils parcouru ?
   A.N. : $a = 30$ m et $v = 4$ ms^{-1}. Calculer T et $\mathcal{L}$.

Toboggan aquatique



Un point M décrit le mouvement d'une personne sur un toboggan dont la courbe est donnée par les équations

$$x = b\cos\theta\ , \quad y = b\sin\theta\ , \quad z = h\theta$$

où h et b sont des constantes positives, et $\theta(t) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM'})$, M' étant le projeté de M sur le plan Oxy par rapport à $\vec{e}_z$.

1. On se place dans la base des coordonnées cylindriques.
   a) Quelle est la nature de la trajectoire décrite par M ? La représenter pour $\theta \in [0, 4\pi]$.
   Quel est le signe de $\dot\theta$? Quelle est la hauteur perdue pour chaque tour de l'axe $\vec{e}_z$?
   b) Exprimer et représenter les vecteurs $\vec{r}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$ au point M, en fonction de h, b, $\dot\theta$ et $\ddot\theta$.
   c) En déduire que $\vec{v}$ fait avec le plan Oxy un angle constant β.
2. On suppose de plus le mouvement est uniforme, c'est-à-dire $|\dot\theta| = \omega =$ cste.
   a) Quelles sont les caractéristiques de $\vec{v}$ et $\vec{a}$?
   b) Calculer le rayon de courbure R de la trajectoire.
   c) Déterminer les vecteurs $\vec{T}$, $\vec{N}$ et $\vec{B}$ de la base de Frenet dans la base cylindrique.
   d) Trouver la longueur $L(t)$ parcourue le long de la courbe après un temps t.
   e) Le toboggan fait deux tours complets. Quel est le temps T mis pour descendre ? La longueur totale $\mathcal{L}$ parcourue ?
   A.N. : $b = 4$ m, $h = 3$ m, $\omega = \pi/4$ rad.s^{-1}, $\pi \simeq 3.15$. Estimer T, $\mathcal{L}$, v et a.

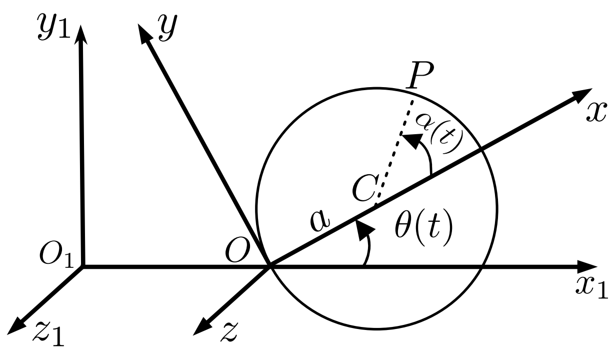
Mouvement d'un cerceau

On note $\mathcal{R}_1$ le référentiel galiléen constitué par les 3 axes du repère $\mathcal{R}_1 = (O_1, x_1, y_1, z_1)$ munis des vecteurs unitaires $\vec{i}_1$, $\vec{j}_1$, $\vec{k}_1$. Le référentiel $\mathcal{R} = (O, x, y, z)$ est défini de la façon suivante (voir figure) :

– O se déplace sur l'axe $\overrightarrow{O_1x_1}$ avec une *vitesse constante* v, de sorte que $\overrightarrow{O_1O} = b(t)\vec{i}_1$ avec $b(t) = vt$.

– Oz reste constamment parallèle à $\overrightarrow{O_1z_1}$.

– $\mathcal{R}$ est en rotation par rapport à $\mathcal{R}_1$, d'angle $\theta(t) = (\overrightarrow{O_1x_1}, \overrightarrow{Ox})$.



Le référentiel $\mathcal{R}$ est muni du repère défini par les trois vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.
Dans tout le problème, on exprimera les résultats dans le repère $\mathcal{R}$.
Un cerceau se déplace dans le plan Ox_1y_1 en respectant les conditions suivantes :

– le centre C du cerceau de rayon a est situé sur Ox.

– le point O appartient au cerceau.

– la position du cerceau par rapport au repère $\mathcal{R}$ est caractérisée par l'angle $\alpha(t) = (\overrightarrow{Cx}, \overrightarrow{CP})$, P étant un point du cerceau.

1. Déterminer la vitesse du point O par rapport au référentiel $\mathcal{R}_1$.
2. a) Déterminer la vitesse du point C par rapport au référentiel $\mathcal{R}_1$.
   b) Déterminer l'accélération du point C par rapport au référentiel $\mathcal{R}_1$.
3. Déterminer les coordonnées du point P dans le repère $\mathcal{R}_1$.
4. Déterminer la vitesse du point P par rapport au référentiel $\mathcal{R}_1$, sans utiliser la loi de composition des vitesses.
5. a) Déterminer la vitesse du point P par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.
   b) Déterminer la vitesse d'entraînement du point P.
   c) Vérifier la loi de composition des vitesses.
6. Soit M le point du cerceau qui se trouve en O à l'instant t considéré.
   a) Déterminer la vitesse du point M par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.
   b) Déterminer la vitesse du point M par rapport au référentiel $\mathcal{R}_1$.
   c) Comparer $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ avec la différence $\vec{v}_{M/\mathcal{R}_1} - \vec{v}_{O/\mathcal{R}_1}$. Que peut-on conclure ?
7. a) Déterminer l'accélération du point P par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.
   b) Déterminer l'accélération d'entraînement du point P.
   c) Déterminer l'accélération du point P par rapport au référentiel $\mathcal{R}_1$.

La rivière

Dans tous les raisonnements de cet exercice, il importe de préciser le référentiel choisi. La norme v_c de la vitesse du courant d'une rivière, de largeur $L = 40$ m, est $v_c = 2$ ms^{-1}.

1. La norme v_b de la vitesse d'un bateau en l'absence de courant est $v_b = 4$ ms^{-1}.
   a) *En l'absence de courant* : quel est le temps minimal, noté t_0, que mettrait le bateau pour traverser la rivière ? Quel serait son trajet ? Donner l'orientation de sa vitesse pendant la traversée.
   b) *En présence de courant* : le pilote du bateau impose une vitesse v_b perpendiculaire à la rive. Quel temps met le bateau pour arriver sur la rive opposée ? Comparer à t_0. Quelle est sa trajectoire ?
   c) Le pilote du bateau veut arriver en un point A situé en face de sa position de départ D sur l'autre rive. Quel temps mettra-t-il pour faire la traversée en ligne droite ? Faire un dessin en indiquant les différentes vitesses intervenant dans le problème. Calculer les angles qu'elles font entre elles.
2. Une barque (B) dérive au milieu de la rivière. Au moment où elle passe devant un nageur (N) assis sur la rive, celui-ci décide de rattraper la barque. La norme de sa vitesse de nage en piscine est $v_N = 1$ ms^{-1}. En combien de temps atteint-il la barque ?
3. Un enfant sur la barque lance une pierre (P) en direction de la rive, en visant un arbre (A) situé en face de lui. Où la pierre atterrira-t-elle ?