Licence PMCC S3 — Université Paris-Sud XI
Année 2013-2014

TD systèmes à deux corps, force centrale, collisions

Annales du concours DEUG : `http://lptms.u-psud.fr/wiki-cours/index.php/Mécanique_L2_PMCC`

Données générales : $G = 6.672\,10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2} ; 1 ua $\simeq 150\,10^6$ km.
Terre (symbole $\oplus$) : masse $M_\oplus \simeq 5.977\,10^{24}$ kg ; rayon $R_\oplus = 6371$ km ; excentricité $e_\oplus \simeq 0.017$.

Exercices de cours

☞ Les lois de Kepler : applications simples

Les observations du mouvement des planètes au 16$^{\text{e}}$ siècle par Tycho Brahé puis Johannes Kepler ont permis à Kepler de proposer trois lois régissant le mouvement des planètes :

1$^{\text{re}}$ les orbites des planètes sont des ellipses (de demi axes a et b) dont le Soleil est un foyer.
2$^{\text{e}}$ le rayon vecteur issu du Soleil balaye des aires égales pendant des temps égaux.
3$^{\text{e}}$ les carrés des périodes de révolution $\mathcal{T}$ sont proportionnels aux cubes des grands axes, ce que l'on écrit $a^3/\mathcal{T}^2 = \mathcal{K}$.

On supposera la masse du Soleil $M_\odot$ très grande devant celles des planètes.

1. À quels résultats du cours correspondent les deux premières lois ?
   Exprimer la constante des aires C en fonction de a, b et de la période $\mathcal{T}$ de l'orbite.
2. Exprimer la constante $\mathcal{K}$ de la 3$^{\text{e}}$ loi en fonction de G et de $M_\odot$.
3. La lumière met environ 8min 20s à nous parvenir du Soleil. En déduire une estimation de $M_\odot$.
4. Si l'on ne néglige plus la masse M_P d'une planète dans l'expression de $\mathcal{K}$, montrer que le facteur correctif est $\left(1 + \dfrac{M_P}{M_\odot}\right)$. Faire l'application numérique pour Jupiter avec $M_{♃} \simeq 1.9\,10^{27}$ kg.
5. La comète de Halley revient tous les 76 ans à proximité du Soleil dont elle s'approche au plus près de 0.59 ua. Jusqu'à quelle distance s'éloigne-t-elle du Soleil ? Quelle est l'excentricité e de sa trajectoire ? Représenter qualitativement les trajectoires de la Terre et de la comète de Halley par rapport au Soleil.

☞ Satellites en mouvement circulaire

1. La lune est le seul satellite naturel de la Terre : commenter cette phrase "la lune tombe en permanence sur la Terre".
2. On suppose qu'un satellite est sur une orbite circulaire à une altitude h par rapport à la surface de la Terre. Exprimer le module de sa vitesse v dans le référentiel géocentrique en fonction de G, $M_\oplus$, $R_\oplus$ et h. En déduire la période $\mathcal{T}$ du mouvement.
3. Déterminer à quelle altitude doit se situer un satellite géostationnaire, c'est-à-dire un satellite dont le mouvement dans le plan de l'équateur est toujours au-dessus du même point par rapport à la surface de la Terre. Faire l'application numérique.

☞ Vitesse de Libération – stabilité de l'atmosphère

On considère un objet de masse m en interaction gravitationnelle avec la terre de masse $M_\oplus \gg m$. Il se trouve au niveau de la surface terrestre à une distance de l'ordre de $R_\oplus$.

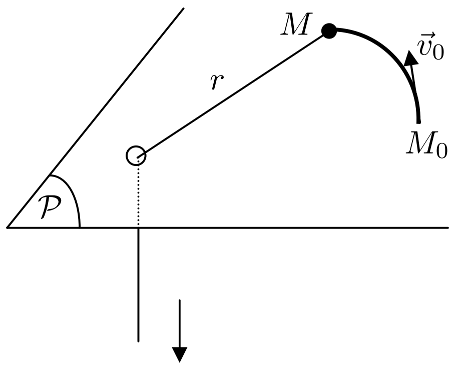
1. En étudiant l'énergie mécanique du système {objet+Terre}, montrer que l'objet échappe à l'attraction terrestre s'il a une vitesse initiale dont la norme est supérieure à la vitesse de libération v_l donnée par $v_l = \sqrt{\dfrac{2GM_\oplus}{R_\oplus}}$.
2. La vitesse typique des molécules d'un gaz est donnée par $v = \sqrt{3RT/\mathcal{M}}$, où R est la constante des gaz parfaits, T la température et $\mathcal{M}$ la masse molaire de la molécule. L'atmosphère terrestre est principalement composée de diazote et de dioxygène. Ces gaz sont-ils retenus par la gravité ?

Données : $R \simeq 8.314$ J.K^{-1}.mol^{-1}, $\mathcal{M}_{N_2} \simeq 28$ g.mol^{-1}, $\mathcal{M}_{O_2} \simeq 32$ g.mol^{-1}.

Enrouleur de fil

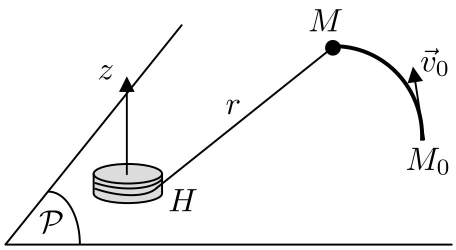
Un point M de masse m glisse sans frottement sur un plan horizontal $\mathcal{P}$. Il est retenu par un fil de masse négligeable. On examine les deux cas **A** et **B** suivants :

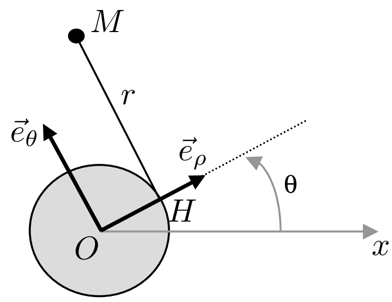
A. Le fil coulisse à travers un petit trou O du plan horizontal et on fait varier (par exemple à l'aide d'un petit moteur) la distance $r = OM$ selon la loi $r = -Vt + r_0$, où V est une constante positive. À $t = 0$, M se trouve en $M_0(r_0)$ et possède une vitesse $\vec{v}_0$ située dans le plan $\mathcal{P}$ et de direction quelconque.



1. En appliquant le théorème du moment cinétique, trouver une première quantité conservée.
2. Dans le bon choix de système de coordonnées, exprimer la vitesse $\vec{v}$ de M en fonction des données.
3. Calculer la tension $\vec{T}$ exercée par le fil sur le point mobile. Montrer que sa norme au voisinage de $r = 0$, $T(r = 0)$, tend vers une valeur physiquement non réalisable.

B. Le fil s'enroule autour d'un cylindre fixe de rayon b et d'axe vertical Oz, O étant dans le plan. On note r la distance HM, H étant le point où le fil rejoint le cylindre (H est également dans le plan). On repère H par ses coordonnées polaires, de base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$. On désigne par ℓ la longueur totale du fil. À $t = 0$, le point M est lancé de telle façon que le fil s'enroule autour du cylindre *en restant tendu.*





1. Faire le bilan des forces s'exerçant sur M à l'instant t. On désigne par $\vec{F}$ leur résultante.
2. Exprimer $\overrightarrow{OM}$. Calculer la vitesse $\vec{v}$ de M. Montrer qu'elle est toujours perpendiculaire à HM. En déduire que l'énergie cinétique $E_{c,0}$ de M, et donc la norme $v = \|\vec{v}\|$ de la vitesse, sont constantes.
3. Calculer, en fonction de m, r et $E_{c,0}$, le moment cinétique de M en O, puis la force $\vec{F}$ s'exerçant sur M. Que se passe-t-il lorsque le point M s'approche de $H(r \to 0)$?