

TD Gravitation, dynamique dans le référentiel terrestre

Données générales : $G = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$; Terre (symbole T) : masse $M_T \simeq 5.977 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; rayon $R_T = 6371 \text{ km}$; vitesse angulaire de rotation $\omega_T = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$.

Exercices de cours

☞ Champ gravitationnel créé par la Terre

On considère la Terre comme une sphère homogène, de masse volumique ρ et de rayon R_T .

1. Évaluer numériquement la masse volumique ρ .
2. À l'aide du théorème de Gauss, déterminer le champ gravitationnel $\vec{g}$ en fonction de la distance au centre de la Terre r , de G , de M_T et de R_T . Évaluer numériquement $\vec{g}(R_T)$.
3. Trouver le potentiel de gravitation $\varphi(r)$ associé en prenant $\varphi(\infty) = 0$.
4. On se place à une altitude $h \ll R_T$, estimer la correction $\vec{g}(h) - \vec{g}(R_T)$.
5. On creuse un tunnel entre le pôle Nord et le pôle Sud de la Terre et vous sautez dedans sans vitesse initiale : que vous arrive-t-il ?

Déviation vers l'Est

Un point tombe en chute libre dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ sans vitesse initiale d'une altitude h . Le but de l'exercice est de montrer que la rotation de la Terre entraîne une déviation vers l'Est D donnée par

$$D = g\omega_T \frac{\cos \lambda}{3} \left(\frac{2h}{g} \right)^{3/2}. \quad (1)$$

Nous allons traiter les équations en considérant que la limite $\omega \rightarrow 0$ et ne conserver que les corrections d'ordre un.

1. Justifier que l'on peut négliger l'effet de la force d'entraînement. On considérera donc que $\vec{g}$ passe par le centre de la Terre. Peut-on négliger la force de Coriolis ? Dans quelle direction agit-elle dans l'hémisphère Nord et l'hémisphère Sud ?
2. En déduire, sous forme vectorielle, l'équation du mouvement de la chute libre.

On va trouver une approximation de la solution au premier ordre en ω_T en écrivant $\vec{r}(t) = \vec{r}^{(0)}(t) + \vec{\varepsilon}(t)$, où $\vec{r}^{(0)}(t)$ est la solution pour $\omega_T = 0$ et $\vec{\varepsilon}$ le terme correction d'ordre un.

3. Donner la forme générale de $\vec{r}^{(0)}$ en fonction de conditions initiales $\vec{r}_0$ et $\vec{v}_0$.
4. En déduire $\vec{\varepsilon}$ puis la forme de la solution au premier ordre en ω_T .
5. On prend $\vec{v}_0 = 0$. En projetant sur la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ telle que $\vec{e}_z$ est selon la verticale et $\vec{e}_y$ vers l'Est, montrer qu'on a alors une déviation vers l'Est donnée par la formule (??).
6. Faire l'application numérique avec les données de l'expérience de Ferdinand Reich dans un puits en 1833 : $h = 158 \text{ m}$, $\lambda = 50^\circ$.

Pendule de Foucault

En suivant les données de l'expérience historique de 1851 au Panthéon (latitude $\lambda = 48^\circ$: une boule de masse $m = 28$ kg est suspendue à un câble de masse négligeable de longueur $\ell = 67$ m. On supposera les oscillations suffisamment faibles de sorte que l'on puisse considérer que le mouvement s'effectue dans le plan horizontal Oxy ($x, y, z \ll \ell$). On prendra pour axes $\vec{e}_z$ selon la verticale passant par le point d'attache du pendule, $\vec{e}_x$ dirigé vers l'Est et $\vec{e}_y$ vers le Nord. On notera $\vec{g}$ le champ de pesanteur qui inclue l'effet de la force d'entraînement en sa présence. On trouve une reproduction du pendule de Foucault au Panthéon ainsi que dans de nombreux endroits haut de plafond à travers le monde.



1. On note $\vec{T}$ la tension du fil. Montrer qu'avec les approximations de l'énoncé hypothèses de l'énoncé, on peut écrire

$$\vec{T} \simeq T \left(-\frac{x}{\ell} \vec{e}_x - \frac{y}{\ell} \vec{e}_y + \vec{e}_z \right).$$

2. Justifier que la vitesse se simplifie en $\vec{v} \simeq \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$, i.e. $\dot{z} \ll \dot{x}, \dot{y}$. De même, on prendra $\ddot{z} \simeq 0$ par la suite. En déduire l'expression de la force de Coriolis dans la base du référentiel terrestre.
3. Soit $\omega = \sqrt{g/\ell}$ et $\Omega = \omega_T \sin \lambda$. Comparer numériquement ces deux pulsations.
4. Montrer que, dans le référentiel terrestre et avec nos approximations, les équations du mouvement prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega^2 x + 2\Omega \dot{y} \\ \ddot{y} &= -\omega^2 y - 2\Omega \dot{x} \end{aligned}$$

5. Pour résoudre ces équations couplées, on introduit la variable complexe $u = x + iy$. Écrire l'équation différentielle pour u .
6. Résoudre l'équation pour u avec pour conditions initiales $\vec{v}(0) = \vec{0}$ et $x(0) = x_0, y(0) = 0$. En déduire $x(t)$ et $y(t)$. On pourra introduire la notation $\omega' = \sqrt{\omega^2 + \Omega^2}$.
7. Montrer que, dans le référentiel $(\vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}_z)$ tournant autour de $\vec{e}_z$ avec l'angle $\theta(t) = -\Omega t$, le mouvement d'oscillations est une ellipse dont on déterminera le grand axe et le petit axe ainsi que la période d'oscillation.
8. Donner les périodes associées à ω' et Ω . D'après vous, doit-on tenir compte des frottements ? À quel endroit de la Terre l'effet est-il le plus fort ? Expliquer alors qualitativement le phénomène dans le référentiel géocentrique.