Licence de Physique Chimie S6 Université Paris-Sud XI
Année 2013-2014

TD de Mécanique Quantique 2

Transformée de Fourier dans les notations de Dirac

On montre dans cet exercice combien les notations de Dirac simplifient et rendent naturelle l'interprétation de la transformée de Fourier.

1. Justifier rapidement pourquoi on peut interpréter les ondes planes $\psi_{p_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ip_0 x/\hbar}$ comme les fonctions propres de l'opérateur impulsion $\hat{p}$. Quelle est la valeur propre associée ?
2. Mêmes questions pour $\psi_{x_0}(x) = \delta(x - x_0)$ avec l'opérateur de position $\hat{x}$.
3. On note $|x_0\rangle$ les états propres de $\hat{x}$ ($\hat{x}|x_0\rangle = x_0|x_0\rangle$) dont on connaît la représentation spatiale ci-dessus.
   a) Que vaut $\langle x_0|\psi\rangle$ pour un état $|\psi\rangle$ quelconque ?
   b) Décomposer $|\psi\rangle$ en fonction des $|x_0\rangle$.
   c) Que vaut $\langle x_1|x_0\rangle$? Justifier la relation de fermeture $\int dx_0 |x_0\rangle\langle x_0| = \mathbf{1}$.
4. On note $|p_0\rangle$ les états propres de $\hat{p}$ ($\hat{p}|p_0\rangle = p_0|p_0\rangle$).
   a) Que vaut $\langle x_0|p_0\rangle$? Et $\langle p_1|p_0\rangle$?
   b) On note $\psi(p) = \langle p|\psi\rangle$. Montrer rapidement que c'est la transformée de Fourier de $\psi(x)$. Retrouver l'expression de la transformée de Fourier inverse.
   c) Interpréter cela comme un changement de base. Quels sont les éléments de matrice du changement de base ?
5. Retrouver et interpréter l'égalité de Parseval-Plancherel, pour deux fonctions ψ et φ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(p)\varphi(p)dp$$

L'Hamiltonien, un opérateur hermitique

On reprend les notations du cours sur le spin 1/2.

1. Pourquoi doit-on avoir $|c_\uparrow(t)|^2 + |c_\downarrow(t)|^2 = 1$?
2. Rappeler la forme générale que prend l'équation de Schrödinger pour ce système à deux niveaux, en introduisant l'Hamiltonien $\hat{H}$.
3. Montrer que $\hat{H}$ doit être hermitique, c'est-à-dire que $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$.

Refaire l'exercice en utilisant les notations de Dirac.

Évolution temporelle d'un système à deux niveaux

Soient $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ deux vecteurs propres normalisés d'un Hamiltonien $\hat{H}$ associés aux valeurs propres E_1 et E_2. On pose $\hbar\omega = E_2 - E_1$.

1. Écrire la matrice de $\hat{H}$ dans la base $|\psi_{1,2}\rangle$.
2. Soit l'état $|\psi_-\rangle \propto |\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle$. Normaliser $|\psi_-\rangle$ puis calculer $\langle E\rangle$ et ΔE dans cet état.
3. On prend comme condition initiale $|\psi\rangle(t = 0) = |\psi_-\rangle$. Quel est l'état $|\psi\rangle(t)$ à un instant t ultérieur ?
4. Soit l'observable $\hat{A}$ telle que $\hat{A}|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle$ et $\hat{A}|\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle$. Écrire la matrice associée à $\hat{A}$ dans la base $|\psi_{1,2}\rangle$.
5. Quels sont les vecteurs propres $|\psi_\pm\rangle$ et valeurs propres $a_\pm$ de $\hat{A}$?
6. Pour l'état $|\psi\rangle(t)$ trouvé ci-dessus, quelle est la probabilité lors d'une mesure de $\hat{A}$ de trouver comme résultat la valeur propre -1 en fonction de t ?