Licence de Physique Chimie S6 | Université Paris-Sud XI
Année 2013-2014

TD de Mécanique Quantique 6

Quantification du moment cinétique orbital à deux dimensions

Le cas tridimensionnel vu en cours est plus commun et utile car les situations physiques sont plutôt tridimensionnelles (rotation des molécules, atome d'hydrogène,...). Cependant, le cas bidimensionnel que nous allons voir ici est plus simple formellement et permet de bien comprendre l'origine de la quantification du moment orbital, en lien avec ce que vous avez résolu pour les puits unidimensionnels.

Approche qualitative

On considère une particule de masse M, effectuant un mouvement de rotation de rayon r dans le plan xOy, autour de l'origine et animée d'une impulsion radiale $\pm p$ (suivant le sens de rotation). Ce mouvement est a priori le résultat d'un potentiel central qui met en orbite la particule mais nous n'avons pas besoin de discuter le détail du comportement de ce potentiel pour ce qui est de la quantification du mouvement angulaire (comme dans le cas tridimensionnel).

On se place dans un premier temps dans une description classique :

1. Faire un schéma de la situation et donner l'énergie cinétique de la particule en fonction de p et M.
2. Exprimer le moment angulaire L_z en fonction de p et r pour chacun des sens possibles de rotation.
3. Réécrire l'énergie cinétique comme une énergie cinétique de rotation $\frac{L_z^2}{2I}$ en faisant apparaître le moment d'inertie I que l'on exprimera en fonction de M et r.

On introduit maintenant des éléments de mécanique quantique. On note λ la longueur d'onde associée à la nature ondulatoire de la particule.

1. Rappeler la relation de de Broglie.
2. Soit φ l'angle azimutal le long de la trajectoire et $s = r\varphi$ la coordonnée qui donne la position de la particule le long de la trajectoire. Quelles sont les valeurs possibles pour s ? Que doit vérifier la fonction d'onde $\psi(s)$?
3. On cherche une solution en onde plane du type $\psi(s) = A\cos(ks)$ avec k le vecteur d'onde. Quelle est la condition de quantification sur k ? On pourra introduire un entier m.
4. En déduire que les valeurs possibles de L_z sont de la forme $\pm\hbar m$.
Quelle est alors la quantification de l'énergie ?

Opérateur de moment cinétique

1. Rappeler l'expression de l'opérateur $\hat{L}_z$ en fonction de $\hat{x}, \hat{y}$ et $\hat{p}_x, \hat{p}_y$, puis sa représentation dans les coordonnées cartésiennes x, y.
2. On utilise maintenant les coordonnées polaires (r, φ) telles que $x = r\cos\varphi$ et $y = r\sin\varphi$. En partant de $\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$, montrer que
$$\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{1}$$
3. On cherche les fonctions propres de $\hat{L}_z$ sous la forme $\psi(r, \varphi) = R(r)P(\varphi)$. Donner les conditions de normalisation des fonctions $R(r)$ et $P(\varphi)$.
4. Déterminer $P(\varphi)$. Montrer que les valeurs propres sont des multiples entiers de $\hbar$. Montrer que les $\{P_m(\varphi)\}$ sont orthonormées (m étant l'entier associé à la valeur propre).
5. On rappelle que le laplacien dans les coordonnées polaires s'écrit
$$\hat{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{2}$$
Montrer que le terme d'énergie cinétique commute avec $\hat{L}_z$.
6. Retrouver la quantification de l'énergie de rotation obtenue dans la première partie.