Correction Examen Phys201
Session 1, 3 janvier 2017

Exercice 1. Segment chargé uniformément

1. La charge totale portée par le segment est $Q = 2\lambda d$, donc $\boxed{\lambda = \frac{Q}{2d}}$.
2. Par définition de λ, $\boxed{dQ = \lambda dx}$.
3. Tous les plans contenant l'axe (Mx) sont symétrie de la distribution de charges. Ils sont ainsi plans de symétrie de $\vec{E}(M)$, qui appartient à leur intersection : sa direction est $\vec{u}_x$.

   Par ailleurs, $\lambda > 0$ (car par hypothèse, $Q > 0$), et on a supposé $L > d$. Ainsi le sens de $\vec{E}(M)$ est $+\vec{u}_x$ car les lignes de champ électrique fuient les charges positives.
4. Le champ créé au point M par la charge dQ située en x est le champ coulombien

$$d\vec{E}(M) = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 (L-x)^2}\vec{u}_x$$

$$\boxed{d\vec{E}(M) = \frac{Q dx}{8\pi d\epsilon_0 (L-x)^2}\vec{u}_x}$$

5. Selon le principe de superposition, le champ total $\vec{E}(M)$ est la somme de ces contributions élémentaires, cette somme est très simple à calculer car toutes les contributions sont colinéaires :

$$\begin{aligned}
\vec{E}(M) &= \int_{P=A}^{B} d\vec{E}(M) \\
&= \int_{x=-d}^{d} \frac{Q dx}{8\pi d\epsilon_0 (L-x)^2}\vec{u}_x \\
&= \frac{Q}{8\pi d\epsilon_0}\vec{u}_x \int_{-d}^{d} \frac{dx}{(L-x)^2} \\
&= \frac{Q}{8\pi d\epsilon_0}\vec{u}_x \left[\frac{1}{L-x}\right]_{-d}^{d} \\
&= \frac{Q}{8\pi d\epsilon_0}\vec{u}_x \left(\frac{1}{L-d} - \frac{1}{L+d}\right) \\
&= \frac{Q}{8\pi d\epsilon_0}\vec{u}_x \left(\frac{2d}{L^2-d^2}\right) \\
&\boxed{= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (L^2-d^2)}\vec{u}_x}
\end{aligned}$$

6. Un développement limité à l'ordre 1 en $d/L \ll 1$ donne l'équivalent de $\vec{E}(M)$ suivant :

$$\boxed{\vec{E}(M) \underset{d/L \ll 1}{\sim} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L^2}\vec{u}_x}$$

7. On reconnaît ici <u>le champ électrique coulombien qui serait créé par une charge ponctuelle Q placée en O</u> i.e. par le monopôle de charge équivalent au segment uniformément chargé.
8. Les plans (Nxy) et (Nyz) sont des plans de symétrie de la distribution de charge passant par N. $\vec{E}(N)$ appartient donc à leur intersection : sa direction est $\vec{u}_y$. Si l'on se restreint à $L' > 0$, son sens est $+\vec{u}_y$ car $\lambda > 0$.

9. Le champ $d\vec{E}(N)$ créé en N par dQ située en P est

$$\boxed{d\vec{E}(N) = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 PN^3}\vec{PN} = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{x^2+L'^2}\vec{u}_{PN}.}$$

10. En vertu du principe de superposition, le champ total $\vec{E}(N)$ est la somme de ces contributions élémentaires. Cependant $\vec{PN}$ change de direction lorsque P varie, on ne peut donc pas sommer naïvement les valeurs algébriques des contributions $d\vec{E}(N)$. L'étude de symétries menée auparavant nous permet dores-et-déjà de conclure que seule la projection $d\vec{E}(N)\cdot\vec{u}_y$ de $d\vec{E}(N)$ selon (Oy) contribuera au champ total. Ainsi :

$$\begin{aligned}\vec{E}(M) &= \int_{P=A}^{B}(d\vec{E}(M)\cdot\vec{u}_y)\vec{u}_y\\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\vec{u}_y\int_{x=-d}^{d}\frac{dx}{(L'^2+x^2)^{3/2}}(L')\\ &\boxed{= \frac{L'\lambda}{4\pi\epsilon_0}\vec{u}_y\int_{-d}^{d}\frac{dx}{(L'^2+x^2)^{3/2}}}\end{aligned}$$

11. Un développement limité à l'ordre 1 en $x/L' \ll 1$ dans l'intégrale est possible car $\forall x \in [-d,d], |x/L'| < d/L' \ll 1$, on obtient alors :

$$\begin{aligned}\vec{E}(M) &\underset{d/L\ll 1}{\sim} \frac{L'\lambda}{4\pi\epsilon_0}\vec{u}_y\int_{-d}^{d}\frac{dx}{L'^3}\\ &\boxed{\vec{E}(M) \underset{d/L\ll 1}{\sim} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L'^2}\vec{u}_y}\end{aligned}$$

On retrouve là aussi la contribution monopolaire ; en conclusion : regarder une distribution de charges de loin, c'est comme regarder la charge ponctuelle équivalente pour le calcul du champ électrique.

Exercice 2. Théorème de Gauss. Conducteurs en équilibre

A. Cylindre chargé en volume

1. L'invariance de révolution autour du cylindre et la quasi-invariance par translation selon l'axe (Oz) (en effet, l'hypothèse $R/L \ll 1$ signifie que le cylindre est très allongé) nous guident vers un choix de coordonnées cylindriques. Autrement dit : on étudie un cylindre, les coordonnées cylindriques sont faites pour mener cette étude, ne nous en privons pas !
2. Les cylindres concentriques de rayon r forment des surfaces iso-ρ, i.e. uniformément chargées car ρ ne dépend que de r. Ainsi la charge contenue entre les cylindres de rayon r et de rayon $r+dr$ est

$$\begin{aligned}dQ_L(r) &= \rho(r)\underbrace{2\pi rLdr}_{\text{Volume contenu entre les cylindres.}}\\ &\boxed{= \rho_0 2\pi r^2 dr\frac{L}{R}.}\end{aligned}$$

3. On en déduit par sommation la charge totale contenue dans un cylindre de rayon r :

$$\begin{aligned}Q_L(r) &= \int_{u=0}^{r} dQ_L(u)\\ &= \int_0^r 2\pi\rho_0\frac{L}{R}u^2du\\ &= 2\pi\rho_0\frac{L}{R}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^r\\ &\boxed{= \frac{2\pi\rho_0 L}{R}\frac{r^3}{3}}\end{aligned}$$

4. En un point M quelconque passent les plans de symétrie de ρ (Mrz) et $(Mr\theta)$.
5. Ces plans, symétrie de la distribution de charge et donc de $\vec{E}$, contiennent $\vec{E}(M)$ en leur droite intersection $(M\vec{u}_r)$.

   Le sens de $\vec{E}$ est $+\vec{u}_r$ car on sait que ses lignes de champ fuient les charges positives. (par hypothèse en effet $\rho_0 > 0$)
6. A priori $E(r, \theta, z)$ dépend de trois variables. Les invariances par rotation autour de l'axe des côtes z et par translation selon ce même axe éliminent respectivement les dépendances en θ et z.
7. On choisit pour surface de Gauss un cylindre fermé de hauteur L et de rayon r. En effet, à sa surface latérale, le champ est normal et constant en norme ; ses surfaces supérieures -rejetées à l'infini- sont d'aire négligeable devant l'aire latérale.
8. Pour $r < R$, la charge contenue dans le cylindre est $Q_L(r)$, ainsi d'après le théorème de Gauss :

$$E(r<R) \underbrace{2\pi r L}_{\text{Surface latérale du cylindre}} = \frac{Q_L(r)}{\epsilon_0}$$
$$E(r<R)2\pi r L = \frac{2\pi\rho_0 L}{R\epsilon_0}\frac{r^3}{3}$$
$$\boxed{E(r<R) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{r^2}{3R}}$$

   Pour $r > R$, la charge contenue dans le cylindre est $Q_L(R)$, ainsi d'après le théorème de Gauss :

$$E(r>R)2\pi r L = \frac{Q_L(R)}{\epsilon_0}$$
$$E(r>R)2\pi r L = \frac{2\pi\rho_0 L}{R\epsilon_0}\frac{R^3}{3}$$
$$\boxed{E(r>R) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{R^2}{3r}}$$

9. $\vec{E}(M)$ dérive de $V(M)$ selon $E(r) = -\dfrac{dV}{dr}$. Ainsi, on obtient par intégration :

$$\begin{cases} V(r>R) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{R^2}{3}\ln(r) + C \\ V(r<R) = -\frac{1}{9}\frac{\rho_0}{\epsilon_0 R}r^3 + D \end{cases}$$

   Puis par application des conditions de raccordement :

$$\boxed{\begin{cases} V(r>R) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{R^2}{3}\ln(\frac{R}{r}) \\ V(r<R) = \frac{1}{9}\frac{\rho_0}{\epsilon_0 R}(R^3 - r^3) \end{cases}}$$

B. Deux conducteurs cylindriques

1. En équilibre, la charge $Q_L(R)$ se répartit en surface du cylindre, à une distance R de l'axe de révolution. Sa densité

$$\boxed{\sigma_+ = \frac{Q_L(R)}{2\pi R L} = \frac{\rho_0 R}{3}.}$$

2. Le cylindre de rayon $2R$ est chargé sur sa surface interne, à une distance $2R$ de l'axe de révolution commun aux deux conducteurs. Les deux conducteurs étant en influence totale, leur charge est opposée. Ainsi la densité

$$\boxed{\sigma_- = \frac{-Q_L(R)}{4\pi R L} = -\frac{\rho_0 R}{6}.}$$

3. (a) Pour $r < R$, on a un conducteur en équilibre électrostatique. Par définition on a donc $\vec{j} = \vec{0}$, or d'après la loi d'ohm locale $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ ainsi $\vec{E}(r<R) = \vec{0}$.

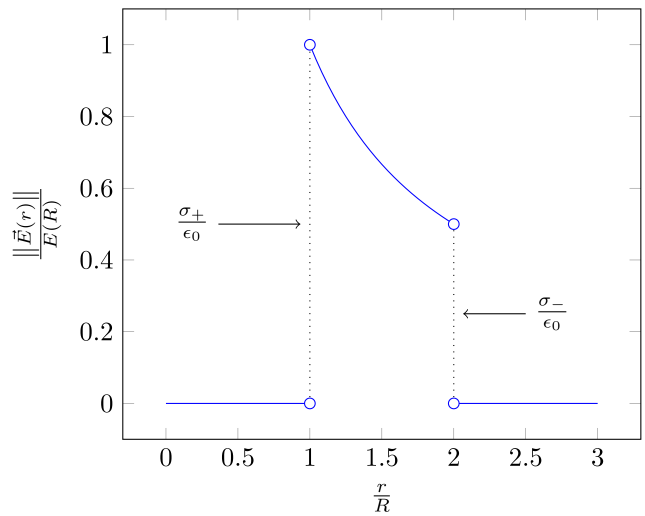

FIGURE 1 – Module de $\vec{E}$ en fonction de r/R. Les discontinuités ne sont pas divisées par $E(R)$.

(b) Pour $R < r < 2R$, on applique le théorème de Gauss au même cylindre que dans la partie A. Or la charge contenue dans le cylindre est toujours $Q_L(R)$ ce qui fait que l'on peut réemployer le calcul de A :

$$\boxed{E(R < r < 2R) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{R^2}{3r}}$$

(c) De même qu'en (a), $\underline{\vec{E}(r > 2R) = \vec{0}}$.

4. La norme du champ électrique en fonction de r est représentée dans la figure 1. Les discontinuités sont dues à la traversée d'une surface chargée.
5. (a) Le potentiel est nul en $r = 2R$, il est continu en ce point et constant au delà, donc $V(r > 2R) = 0$.

   (b) De même que dans la partie A, on obtient par intégration puis raccordement :

$$\boxed{V(R < r < 2R) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{R^2}{3}\ln\left(\frac{2R}{r}\right)}$$

   (c) Par continuité en $r = R$, on a $V(r < R) = V(R^+) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{R^2}{3}\ln(2)$ car le conducteur en équilibre est équipotentiel.
6. Le potentiel est tracé dans la figure 2, pour plus de lisibilité nous employons une système d'unités arbitraires où $\frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{R^2}{3} = 1$.

Exercice 3. Force de Lorentz

1. D'après le théorème de l'énergie cinétique appliqué à la trajectoire de la particule dans la zone A, dans le référentiel supposé galiléen lié au laboratoire, on a :

$$\underbrace{E_c(S^-)}_{E_c\text{juste avant l'entrée dans S}} - \underbrace{0}_{\text{La particule part du repos}} = \underbrace{-q\Delta V}_{\text{Travail de } q\vec{E}}$$

   attention, ΔV est négatif !
2. D'après la troisième loi de Newton appliquée à la particule dans la zone S, dans le référentiel supposé galiléen lié au laboratoire, on a :

$$m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

   La condition pour que la trajectoire ne soit pas accélérée est donc que $\vec{E} = \vec{B} \wedge \vec{v}_0$. Ainsi $\boxed{\vec{E} = -v_0 B\vec{u}_x.}$ Ceci peut se comprendre intuitivement : le champ magnétique tend à courber la trajectoire vers la droite $(+\vec{u}_x)$, il faut donc que le champ électrique exerce une force (et donc une accélération) vers la gauche $(-\vec{u}_x)$ pour compenser ce phénomène.

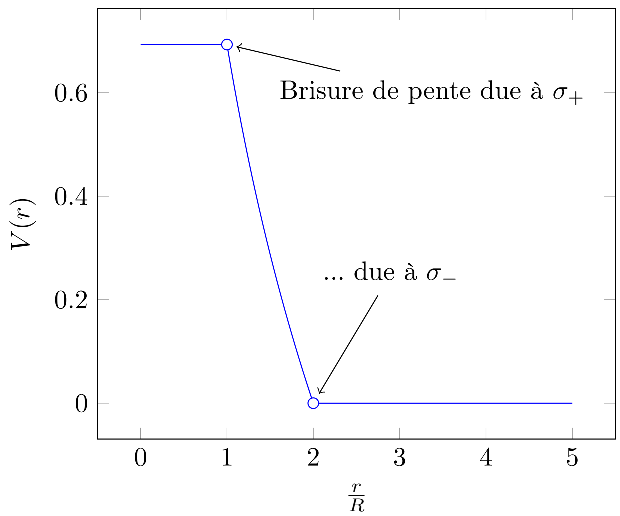

Figure 2 – Potentiel V en fonction de r/R

3. En appliquant la troisième loi de Newton dans le référentiel supposé galiléen du laboratoire -dans la région R- on a :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

- L'accélération est $\perp$ à $\vec{B}$ donc la particule n'accélère pas dans la direction $\vec{u}_z$, elle est donc contenue dans le plan (Oxy) car n'a pas de vitesse initiale selon z.
- Il est donc possible de choisir la base de Frénet [1] $(\vec{t}, \vec{n})$ associée à la trajectoire plane de la particule. La projection de la troisième loi de Newton dans cette base donne :

$$m\left(\frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{R_c}\vec{n}\right) = qvB\vec{n}$$

On obtient ainsi $\dfrac{dv}{dt} = 0$ soit $v = \|\vec{v}_0\|$: la trajectoire est parcourue uniformément. Par ailleurs, $qvB = \dfrac{mv^2}{R_c}$ donc $qB = \dfrac{mv_0}{R_c}$: la trajectoire est donc un arc de cercle de rayon de courbure R_c (constant).

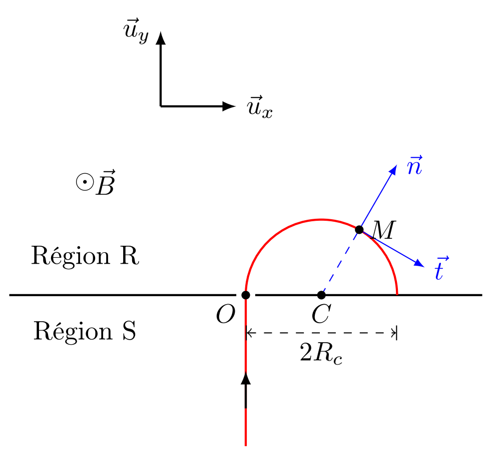

Figure 3 – Trajectoire des ions.

4. La trajectoire des cations est représentée sur la figure 3.

1. Par définition on définit le vecteur tangent $\vec{t} = \frac{\vec{v}}{v}$, et le vecteur normal est l'image de $\vec{t}$ par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct.

5. Le rayon de la trajectoire correspond à la valeur absolue du rayon de courbure $R_c := mv_0/(qB)$.
6. Les ions touchent la paroi à une distance $\boxed{x = 2R_c = 2\dfrac{mv_0}{qB}}$ de O.

Exercice 4. Théorème d'Ampère, force de Laplace

1. On adopte le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) lié à l'axe du fil (fig. 4). Le plan (Mrz) (en bleu) passe par M, c'est un plan de symétrie de la distribution de courant donc antisymétrie de $\vec{B}(M)$. Par conséquent $\vec{B}(M)$ lui est orthogonal, de direction $\vec{u}_\theta$. De plus, les courants sources circulent dans le sens des z croissants, donc les sens de $\vec{B}(M)$ est $+\vec{u}_\theta$, conformément aux conventions d'orientation de l'espace.

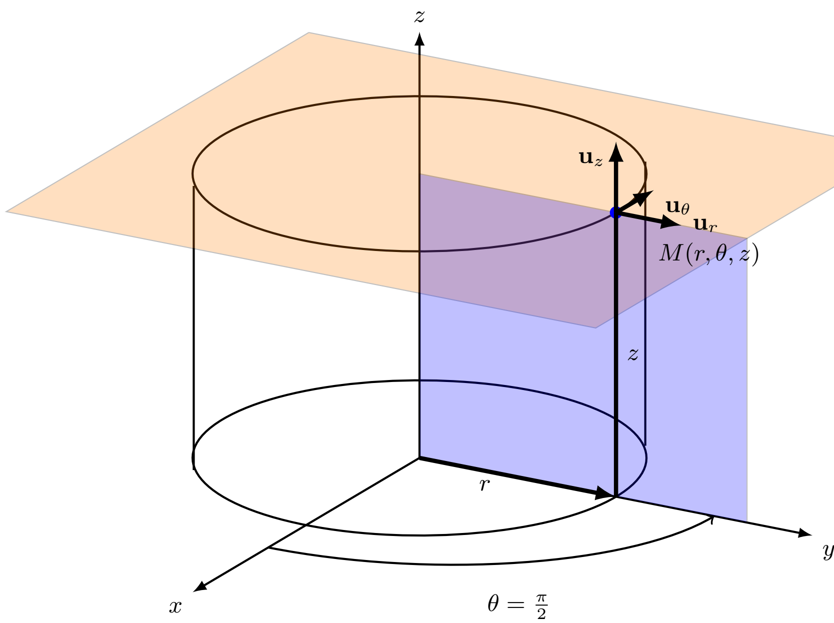

Figure 4 – Système cylindrique lié au fil.

2. On choisit un cercle de rayon r (passant par M), d'axe $[Oz)$ comme contour d'Ampère. Une étude d'invariances montre que la norme de $\vec{B}(M)$ ne dépend que de r. D'après le théorème d'Ampère on a donc : $B(r)2\pi r = \mu_0 I$, d'où $\boxed{\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta.}$
3. Le système cylindrique lié au fil est présenté dans la figure 4. Dans le plan des fils $x = 0$, le système cylindrique se projette facilement en cartésiennes, ce nonobstant, il faut prendre garde au fait que $\vec{u}_{\pi/2} = -\vec{u}_x$ et $\vec{u}_{3\pi/2} = \vec{u}_x$ cf fig. 6.
4. D'après le principe de superposition, le champ magnétique total en présence des deux fils est la somme vectorielle des champs magnétiques créés par chaque fil. On notera qu'en
   - M : $\vec{u}_\theta = \vec{u}_x$
   - N : $\vec{u}_\theta = -\vec{u}_x$
   - P : $\vec{u}_\theta = -\vec{u}_x$

   Ainsi :

$$\vec{B}(M) = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} - \frac{\mu_0 I}{2\pi(r+d)}\right)\vec{u}_x$$
$$\vec{B}(N) = \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi r} - \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}\right)\vec{u}_x$$
$$\vec{B}(P) = \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(r-d)}\right)\vec{u}_x$$

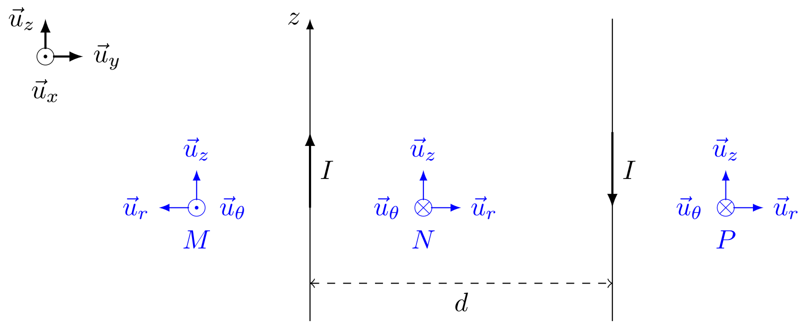

FIGURE 5 – Base cylindrique en M, N et P.

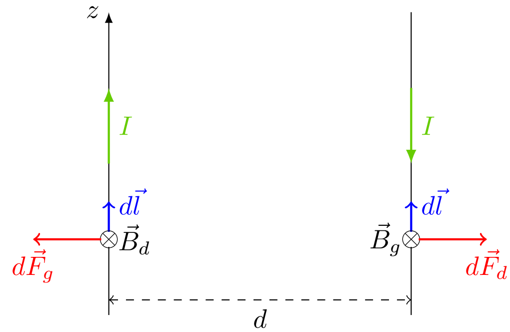

FIGURE 6 – Forces de Laplace exercées sur le conducteur.

Après simplifications :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{d}{r(r+d)} \vec{u}_x$$
$$\vec{B}(N) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{d}{r(r-d)} \vec{u}_x$$
$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{d}{r(r-d)} \vec{u}_x$$

5. Un élément de fil $d\vec{l}$ ressent une force de Laplace $d\vec{F} = Id\vec{l} \wedge \vec{B}$, avec $d\vec{l}$ dans le sens du courant. Il faut de plus prendre garde à ne considérer que le champ magnétique créé par l'autre fil, cela est représenté fig 6.
   - Pour le fil de gauche $d\vec{F}_g = Id\vec{l} \wedge \vec{B}_d = -I|B_d|dl\vec{u}_y$.
   - Pour le fil de droite $d\vec{F}_d = -Id\vec{l} \wedge \vec{B}_g = I|B_g|dl\vec{u}_y$.

   où $\vec{B}_d$ est le champ créé par le fil de droite, au niveau du fil de gauche et $\vec{B}_g$ le champ créé par le fil de gauche, au niveau du fil de droite
6. Si le conducteur n'était pas fixe, c'est-à-dire si aucun opérateur extérieur n'exerçait de force pour compenser la force de Laplace, les deux fils s'éloigneraient. Cela tendrait à maximiser le flux embrassé par le circuit (en supposant que les fils se referment l'un sur l'autre à l'infini, ils forment bien un circuit fermé).

   La portée de ce résultat est en fait plus générale.