

Problème de mécanique des fluides

Comportement d'un film visqueux en géométrie cylindrique

Le sujet comporte une question préliminaire et deux parties indépendantes.

Questions préliminaires

Considérons un liquide non visqueux, éventuellement compressible, de masse volumique $\rho(\vec{r})$ au point \vec{r} , de champ de vitesse local $\vec{u}(\vec{r})$, et soumis à un champ de forces extérieures dont la résultante volumique est notée \vec{r}_v .

- 1) Rappeler l'équation de conservation de la masse.
- 2) Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à une particule fluide de masse δm et de volume δv . En déduire l'équation d'EULER régissant la dynamique locale du fluide parfait.
- 3) Que devient l'équation précédente pour un fluide incompressible mais visqueux (on note ν sa viscosité cinématique). Cette équation, dite de NAVIER-STOKES, est-elle valable pour un fluide compressible? Le cas échéant, dans quelle condition l'équation de NAVIER-STOKES permet-elle de décrire la dynamique d'un fluide compressible? Aucune démonstration n'est demandée dans cette question 3.
- 4) Les dimensions physiques de la viscosité cinématique sont celles d'un coefficient de diffusion. Commenter succinctement la signification de cette remarque. En particulier, peut-on identifier un processus de diffusion sous-jacent à l'équation de NAVIER-STOKES? Si oui, quelle est la grandeur concernée?
- 5) Qu'appelle-t-on "fluide newtonien". Citer quelques exemples de fluides non newtoniens.

Remarque importante

Dans toute la suite du problème, nous nous restreindrons à l'étude de fluides visqueux incompressibles. Nous serons par ailleurs amenés à effectuer des raisonnements "*en ordre de grandeur*". Nous considérerons en effet des écoulements dont la géométrie est caractérisée par (au moins) deux échelles de longueur très différentes. Il est alors judicieux de simplifier les différentes équations du problème en négligeant les termes dont l'ordre de grandeur est *a priori* petit devant celui des termes dominants, avant de tenter une résolution analytique. Pour ce faire, nous supposerons "douces" les variations des grandeurs considérées; par exemple, si une composante cartésienne u_x du champ de vitesse \vec{u} varie d'une quantité U sur une échelle de longueur L lorsqu'on se déplace dans la direction \hat{x} des abscisses x , l'ordre de grandeur de la dérivée partielle $\partial u_x / \partial x$ est donné par U/L , et plus généralement, celui de $\partial^n u_x / \partial x^n$ par

U/L^n . Cette estimation décrit correctement la variation des quantités calculées en fonction des échelles pertinentes du problème, mais ne permet bien entendu pas d'obtenir les préfacteurs numériques, qu'il est inutile de connaître si l'on souhaite simplifier les équations dynamiques.

Formulaire

→ Pour le champ de vitesse, écrit en coordonnées cylindriques sous la forme

$$\vec{u} = w(r, \theta, t) \hat{r} + v(r, \theta, t) \hat{\theta},$$

où \hat{r} et $\hat{\theta}$ désignent respectivement les vecteurs unitaires radiaux et orthoradiaux, on a

$$\left(\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) = w \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\nabla^2 \vec{u} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{w}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] \hat{r} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] \hat{\theta}.$$

→ On donne également les primitives suivantes

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a},$$

d'où l'on déduit, en prenant les dérivées successives par rapport à a :

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2 + x^2)} + \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^3} = \frac{x}{4a^2(a^2 + x^2)^2} + \frac{3x}{8a^4(a^2 + x^2)} + \frac{3}{8a^5} \arctan \frac{x}{a}.$$

◇

Première partie : instabilité de l'imprimeur

Dans certains procédés industriels, intervenant notamment dans la fabrication du papier, des suspensions de particules sont appliquées sur un substrat. Cette méthode d'enduction peut être étudiée dans la situation où un fluide est confiné entre deux cylindres d'axes parallèles légèrement excentrés. Nous considérerons la géométrie représentée sur la figure 1-a) dans laquelle le cylindre extérieur de rayon R_e est immobile tandis que le cylindre intérieur de rayon R_i est animé d'un mouvement de rotation autour de son axe fixe : sa périphérie se déplace à la vitesse constante U et entraîne de ce fait le liquide (ici, un fluide newtonien incompressible) situé dans l'espace interstitiel.

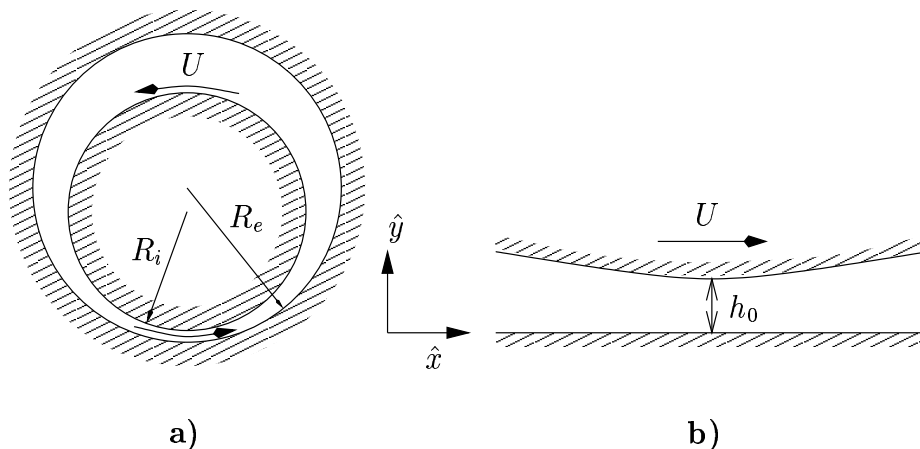


FIG. 1 – **a)** Représentation des deux cylindres excentrés. Le cylindre intérieur de rayon R_i est en rotation autour de son axe tandis que le cylindre extérieur (rayon R_e) est immobile. **b)** Vue du système au voisinage du point de séparation minimale entre les rouleaux.

Nous nous limiterons à l'étude de l'écoulement induit au voisinage de la zone de séparation minimale entre les deux rouleaux dont les rayons sont tous deux supposés grands devant l'épaisseur de la couche de liquide (*i.e.* $h(x) \ll R_i$ et R_e). La force de pesanteur sera négligée.

1) Géométrie du système

On introduit un système de coordonnées cartésiennes comme indiqué sur la figure 1-b). Les hypothèses précédentes autorisent à raisonner comme si l'écoulement avait lieu entre un plan immobile situé en $y = 0$ et une parabole $y = h(x)$ dont la surface se déplace tangentiellement à la vitesse $U\hat{x}$ [voir la figure 1-b)]. En plaçant l'origine des coordonnées x au point de séparation minimale où $h(x) = h_0$, montrer que l'épaisseur de la couche de liquide se met sous la forme

$$h(x) = h_0 + \frac{x^2}{2R}. \quad (1)$$

On explicitera la valeur de R . On vérifiera que cette grandeur a bien le comportement attendu dans la limite où $R_i \rightarrow R_e$ par valeurs inférieures.

2) Approximation de lubrification

L'approximation (1) n'est valable que lorsque l'étendue du film liquide dans la direction x , notée L , est faible devant le rayon des cylindres. On suppose également que dans la

zone d'étude, le film reste mince, c'est-à-dire que $h(x) \ll L$.

- a) Estimer grossièrement le nombre de Reynolds associé à une expérience de laboratoire pour laquelle $R_i = 5$ cm, $R_e = 6$ cm, $h_0 = 0.1$ mm avec un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-4}$ m²/s et une vitesse tangentielle d'entraînement $U = 10$ cm/s.
- b) Montrer que la composante verticale u_y du champ de vitesse \vec{u} du fluide est négligeable devant la composante horizontale u_x .
- c) Estimer l'ordre de grandeur des différents termes apparaissant dans l'équation du mouvement (excepté le gradient de pression). Quelles sont en conséquence les approximations que l'on peut faire pour simplifier cette équation? Montrer qu'il n'est pas nécessaire que le nombre de Reynolds calculé à la question 2.a soit petit devant 1 pour que cette approximation soit valable.
- d) Montrer que le champ de pression P dépend, en première approximation, d'une *unique* variable d'espace que l'on précisera.

3) Champ de vitesse

Quelles sont les conditions aux limites vérifiées par la vitesse u_x ? En déduire la relation

$$u_x = \alpha y(y - h) + \beta y$$

où l'on précisera le sens des fonctions α et β , qui peuvent dépendre de x .

4) Caractéristiques de l'écoulement

- a) Donner l'expression du débit de fluide Q entre les deux rouleaux (débit par unité de longueur dans la direction z).
- b) En déduire que le gradient de pression se met sous la forme

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{6\rho\nu U}{h^2} \left(1 - \frac{\bar{h}}{h}\right), \quad (2)$$

où \bar{h} est l'épaisseur du film pour laquelle $\partial P/\partial x$ s'annule.

- c) En supposant que l'équation (2) est valable pour $-\infty < x < +\infty$ et que la pression P a la même valeur pour $x \rightarrow -\infty$ que pour $x \rightarrow +\infty$, montrer que $\bar{h} = 4h_0/3$. Exprimer alors $P(x)$ et tracer qualitativement les profils de pression et de vitesse. Quels en sont les points remarquables? Montrer l'existence d'un "contre-écoulement" pour $h > 3\bar{h}/2$.
- d) Si la géométrie de l'écoulement est légèrement modifiée par rapport à la situation cylindre/cylindre que nous avons considérée jusqu'à présent, la relation $h(x)$ n'est plus donnée par l'équation (1). Montrer que l'équation locale suivante est néanmoins vérifiée par la pression:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + 3 \frac{\delta}{h} \frac{\partial P}{\partial x} - 6 \rho \nu \delta \frac{U}{h^3} = 0.$$

Donner l'expression de la fonction δ . Dans toute la suite, on considérera de nouveau le cas où $h(x)$ est une parabole au voisinage de $x = 0$.

5) Phénomène de lubrification

- a) Quel est l'ordre de grandeur des variations de la pression à l'intérieur du film liquide? En déduire l'ordre de grandeur de la force verticale F_\perp subie par le cylindre tournant pour les $x < 0$ (par unité de longueur dans la direction z).

- b) Estimer de même l'ordre de grandeur de la force visqueuse $F_{//}$ exercée sur le cylindre intérieur. Justifier le rôle de lubrifiant joué par le film liquide.
- c) Comparer les résultats précédents (en particulier le rapport $F_{//}/F_{\perp}$) à la situation de friction « sèche » où deux corps solides ont un mouvement de glissement relatif.

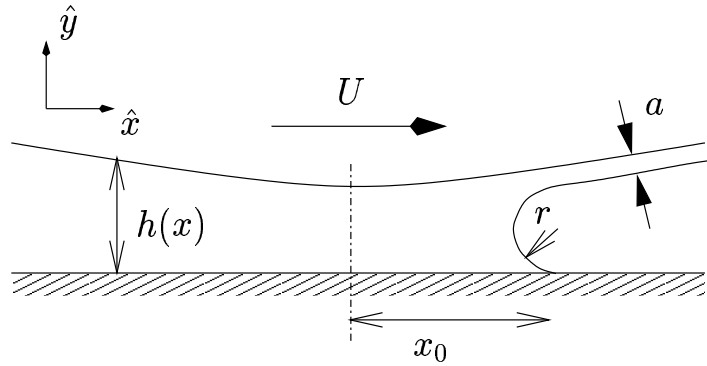


FIG. 2 – Vue schématique du ménisque non perturbé, dans un plan perpendiculaire à l'axe des rouleaux.

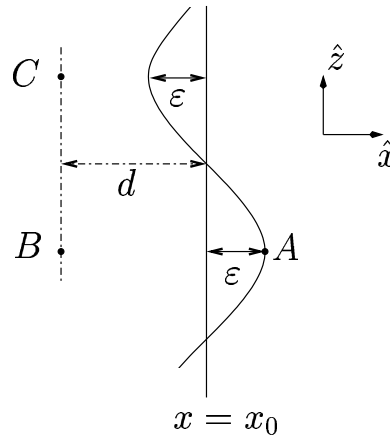


FIG. 3 – Perturbation sinusoïdale du ménisque, dans le plan xOz , par rapport à la position $x = x_0$ (avec $\varepsilon \ll x_0$). L'axe z est parallèle à l'axe des cylindres.

6) Stabilité de l'écoulement

La position du ménisque est définie par $x = x_0$. On admet que son rayon de courbure $r(x_0)$ est tel que $r = h(x_0) - a$ où a est l'épaisseur supposée constante de la pellicule de liquide entraînée par le rouleau tournant [voir la figure 2]. On s'intéresse désormais à la stabilité du ménisque qu'une perturbation, représentée sur la figure 3, amène à la position $x = x_0 + \varepsilon \sin(z/\lambda)$

- a) Si A désigne un point où le ménisque s'est avancé de ε , montrer que la pression en B placée à une distance d derrière la ligne non perturbée s'écrit (on note P_0 la pression atmosphérique ambiante et γ la tension superficielle du liquide) :

$$P_B = P_0 - \frac{\gamma}{r(x_0)} + \frac{\varepsilon\gamma}{r^2(x_0)} \frac{dh}{dx} - (d + \varepsilon) \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\varepsilon\gamma}{\lambda^2}.$$

- b)** Quelle est la pression au point C situé à une distance $d - \varepsilon$ derrière le ménisque?
 - c)** En déduire la condition de stabilité du ménisque. Dans la limite où la longueur d'onde $2\pi\lambda$ de la perturbation est arbitrairement grande, quelle est l'équation qui régit la position critique x_c à partir de laquelle le ménisque devient instable? On pourra faire intervenir le nombre capillaire $Ca = \rho\nu U/\gamma$.
 - d)** Discuter qualitativement l'effet de la viscosité sur la position critique du ménisque. On pourra se placer dans la situation où le film entraîné par le rouleau tournant est de très faible épaisseur par rapport à la hauteur locale $h(x)$.
- 7)** A quel moment aurait-on pu évoquer l'apparition possible d'un phénomène de cavitation?
- 8)** L'instabilité que nous avons mise en évidence, dite « instabilité de l'imprimeur », apparaît pour les vitesses d'entraînement élevées; elle se traduit par une modulation de l'épaisseur du film entraîné avec le rouleau tournant. Cet effet, qui peut être indésirable pour les applications industrielles, est d'autant plus marqué que la viscosité du liquide est élevée et sa tension de surface faible. La viscosité n'a donc pas toujours pour effet d'atténuer les perturbations puisqu'elle constitue ici le moteur de l'instabilité. Connaissez-vous d'autres situations où la viscosité joue le même rôle moteur dans l'apparition de l'instabilité?

Deuxième partie : un problème d'intérêt matinal...

...ou quelle masse maximale de miel peut-on entraîner en régime permanent sur une petite cuiller tenue horizontale et en rotation autour de son manche à une fréquence donnée? Le but de ce problème est de répondre à cette question, et par souci de simplicité, nous modéliserons la cuiller par un cylindre horizontal de rayon a , en rotation autour de son axe noté Oz , à une vitesse angulaire Ω . On suppose le système invariant par translation dans la direction z . Une mince couche de liquide incompressible (modélisant le miel) enrobe le cylindre (voir la figure 4). L'accélération de la pesanteur est notée g , et on travaille dans le système (r, θ, z) des coordonnées cylindriques, (dont l'origine coïncide avec l'axe du cylindre). La surface libre du liquide a pour équation $r = a + h(\theta, t)$ et la condition $|h(\theta, t)| \ll a$ est supposée toujours vraie. En particulier l'épaisseur moyenne h_0 du film liquide, définie par

$$h_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta, t) d\theta$$

est négligeable devant a .

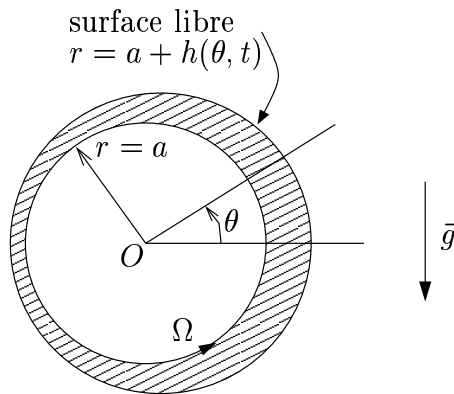


FIG. 4 – Coupe du système dans un plan perpendiculaire à l'axe Oz du cylindre. L'angle θ des coordonnées cylindriques est mesuré par rapport à l'horizontale et r désigne la distance à l'axe Oz . Le liquide enrobant le cylindre est représenté par la partie hachurée du dessin. Le cylindre d'équation $r = a$ tourne autour de Oz à la vitesse angulaire Ω , dans le sens indiqué (sens trigonométrique).

A- Existences de solutions stationnaires

On s'intéresse dans un premier temps aux écoulements stationnaires possibles.

- 1) On note \hat{r} et $\hat{\theta}$ les vecteurs unitaires respectivement radiaux et orthoradiaux des coordonnées cylindriques, et l'on écrit le champ de vitesse sous la forme

$$\vec{u} = w\hat{r} + v\hat{\theta}. \quad (3)$$

Montrer que l'ordre de grandeur W des variations de la composante radiale w au sein du fluide est négligeable devant l'ordre de grandeur des variations de v , noté V . Supposant « douces » les variations de h , on remarquera que l'ordre de grandeur de $h(\theta, t)$ ainsi que de $\partial h / \partial \theta$ est donné *a priori* par h_0 , pour toutes les valeurs de θ .

- 2) L'ordre de grandeur de v est donné par la vitesse de rotation $U = a\Omega$ de la périphérie du cylindre. L'ordre de grandeur V est-il relié *a priori* à U ? De même, l'ordre de grandeur W des variations de w est-il relié à l'ordre de grandeur de w lui-même? On demande une réponse *succincte*. Par la suite, on supposera que U et V sont du même ordre de grandeur.
- 3) Estimer l'ordre de grandeur de chacun des termes apparaissant après projection de $\nabla^2 \vec{u}$ sur la direction $\hat{\theta}$. Dans toute la suite, on ne gardera que le terme dominant dans l'expression de $\hat{\theta} \cdot \nabla^2 \vec{u}$.
- 4) A quelle condition peut-on négliger le terme inertiel $(\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{u}$ devant la force de viscosité? On supposera ce critère réalisé pour poursuivre.
- 5) On néglige en outre les forces de tension superficielle et les forces de pression. Montrer que dans ces conditions, l'équation de NAVIER-STOKES se simplifie en

$$\nu \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = g \cos \theta. \quad (4)$$

- 6) Quelles sont les conditions aux limites vérifiées par \vec{u} en $r = a$ et $r = a + h(\theta)$? On notera $\sigma'_{r\theta}$ la composante $r\theta$ du tenseur des contraintes visqueuses, et on négligera la viscosité de l'air ambiant.
- 7) On donne $\sigma'_{r\theta} = \rho\nu \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$.
 - a) Quel est le terme dominant dans l'expression précédente?
 - b) Montrer que la solution de l'équation (4) s'écrit

$$v(r, \theta) = a\Omega + \beta \frac{g \cos \theta}{2\nu} [(r - a)^2 - 2\gamma (r - a)h]. \quad (5)$$

On précisera l'expression des coefficients β et γ . Tracer l'allure du profil de vitesse $v - a\Omega$ pour différentes valeurs de θ .

- 8) Donner l'expression du débit $Q(\theta)$ à travers une section θ , où $Q(\theta) = \int_a^{a+h(\theta)} v \, dr$.
- 9) Pourquoi Q ne dépend t-il pas de θ ? Préciser laquelle des quatre situations représentées sur la figure 5 est la plus susceptible de correspondre à la réalité expérimentale?

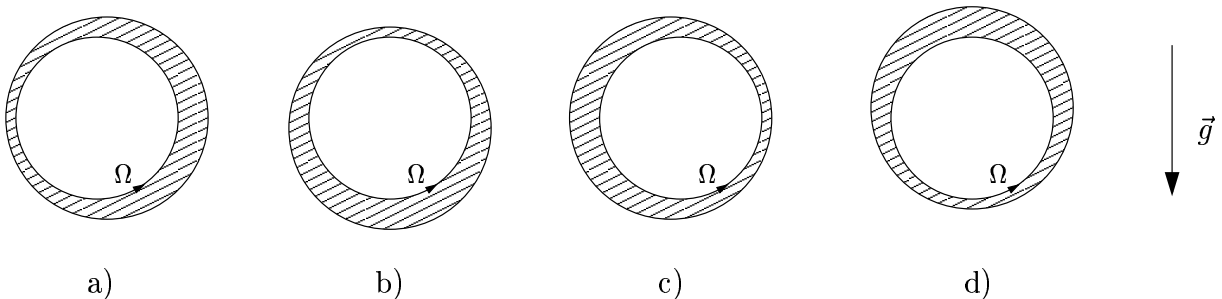


FIG. 5 – Différentes possibilités pour la position du “bourrelet” de fluide enrobant le cylindre.

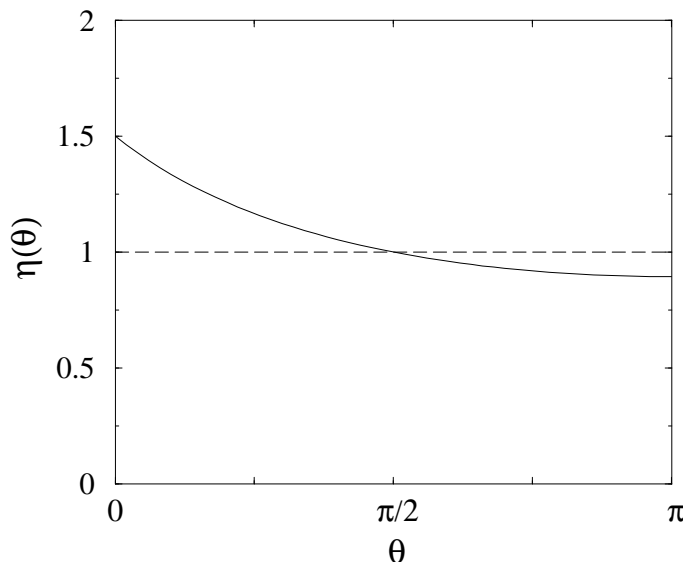
- 10) Calculer la vitesse $v_s(\theta)$ au niveau de la surface libre $r = a + h(\theta)$.

11) On introduit la vitesse réduite $\tilde{v} = v_s/U = v_s/(a\Omega)$.

- a) Montrer que \tilde{v} est solution de $(\tilde{v} - 1)(2\tilde{v} + 1)^2 = -2\alpha \cos \theta$. Donner l'expression de α en fonction de Q, U, g et ν .
- b) Après avoir étudié soigneusement la fonction $f(\tilde{v}) = (\tilde{v} - 1)(2\tilde{v} + 1)^2$, montrer graphiquement que l'on ne peut trouver des solutions continues $\tilde{v}(\theta)$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$ que pour $\alpha \leq \alpha^*$. On précisera la valeur de α^* . En déduire une borne supérieure pour le débit Q .

12) On considère dans cette question le cas critique $\alpha = \alpha^*$, et l'on introduit la hauteur adimensionnée $\eta(\theta) = U h(\theta)/Q$.

- a) Montrer que l'équation suivante est satisfaite : $(4/27) \cos \theta \eta^3 - \eta + 1 = 0$. La solution $\eta(\theta)$ correspondante est représentée ci-dessous. Retrouve-t-on ainsi le résultat de la question 9? Calculer de manière approchée η en $\theta = \pi$, à l'aide d'un développement perturbatif. Comparer à la valeur que l'on peut estimer sur le graphique.



- b) Une évaluation numérique de $\int_0^{2\pi} \eta(\theta) d\theta$ donne le résultat approché 6,641. En déduire la masse M du film liquide, par unité de longueur dans la direction z .

13) On s'intéresse ici à la situation $\alpha < \alpha^*$ pour laquelle on développe $\eta(\theta)$ en série entière :

$$\eta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{4}{27} \alpha \cos \theta \right)^n. \quad (6)$$

Calculer les coefficients a_n jusqu'à l'ordre $n = 4$ inclus. En déduire la relation entre U et la masse M du film liquide. Pour U fixé, quelles sont les valeurs possibles de M ?

- 14) Quelle est la masse maximale que l'on peut stabiliser sur le cylindre? Que se passe-t-il si les conditions sont telles qu'initialement, la masse du film liquide est supérieure à ce seuil?
- 15) A quelle(s) condition(s) était-il légitime de négliger le gradient de pression et les forces de tension superficielle dans la question 5?

B- Evolution des perturbations instationnaires

L'existence de solutions stationnaires ne garantit pas que celles-ci vont être réalisées en pratique. Nous allons dans cette partie étudier l'évolution d'une perturbation instationnaire pour conclure quant à la stabilité des solutions que nous avons caractérisées dans la partie A.

1) Montrer que

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right|_t + [a + h(\theta, t)] w_{r=a+h} = v_{r=a+h} \left. \frac{\partial h}{\partial \theta} \right|_t$$

2) Calculer la dérivée particulaire $\frac{Dh}{Dt} = \left. \frac{\partial h}{\partial t} \right|_\theta + (\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) h(\theta, t)$. En déduire

$$\left. \frac{\partial h}{\partial t} \right|_\theta \simeq -\frac{1}{a} \left. \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right|_t.$$

3) En considérant la fonction $h(\theta, t)$ comme une fonction $h(Q, \theta)$, montrer que

$$a \frac{d\theta}{dt} = \left(\left. \frac{\partial h}{\partial Q} \right|_\theta \right)^{-1}.$$

Dans cette expression, la dérivée "droite" d/dt correspond à la dérivée calculée en suivant le mouvement d'une tranche de débit Q fixé. Il s'agit d'une variante de la dérivée particulaire pour laquelle:

$$\frac{dQ}{dt} = 0.$$

4) En déduire l'expression $T(Q)$ du temps mis par une perturbation iso- Q pour effectuer un tour complet du cylindre. On pourra de nouveau développer la fonction $h(\theta, t)$ en série entière dans l'esprit de la question A-13 (pour quelle raison?) et tronquer le développement à l'ordre $n = 4$ par exemple.

5) Montrer que T est une fonction croissante du débit Q . Conclure quant à la stabilité des solutions stationnaires.

◇

Pour une étude plus poussée, on pourra consulter l'article de H.K. Moffat, paru dans le Journal de Mécanique, vol 16, n° 5, page 651 (1977).