

## Comportement d'un film visqueux en géométrie cylindrique Correction

### Questions préliminaires

1) L'équation de conservation de la masse s'écrit  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0$  ou encore, en introduisant la dérivée particulaire  $D/Dt$ :

$$\text{div} \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}.$$

Cette dernière relation fournit une interprétation de l'opérateur divergence à garder en mémoire : dans les régions où  $\text{div} \vec{u} > 0$ , les particules fluides (de masse  $\delta m$  constante par construction et de volume variable  $\delta v = \delta m/\rho$ ) voient leur volume augmenter ( $\rho$  diminue lorsqu'on l'on suit le mouvement des particules). De même  $\delta v$  diminue lorsque  $\text{div} \vec{u} < 0$ .

2) Equation fondamentale de la dynamique appliquée à une particule fluide :

$$\frac{D(\delta m \vec{u})}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}} P \delta v + \vec{r}_v \delta v.$$

Par ailleurs,  $\delta m$  est une constante du mouvement des particules fluides, si bien que

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{u} \right] = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \vec{r}_v.$$

3) L'équation de NAVIER-STOKES pour un fluide incompressible visqueux s'écrit

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{u} \right] = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \vec{r}_v + \rho \nu \nabla^2 \vec{u}. \quad (1)$$

Cette équation n'est pas valable pour un fluide compressible, sauf dans la limite où la vitesse de l'écoulement  $u$  est petite devant la vitesse du son  $c$ . Plus précisément, il faut que le nombre de MACH  $\text{Ma} = u/c$  vérifie  $\text{Ma}^2 \ll \inf(\text{Re}, 1)$ , où  $\text{Re}$  est le nombre de REYNOLDS de l'écoulement. Cette condition est toujours réalisée dans la limite des petits  $u$ .

4) L'équation de NAVIER-STOKES est une équation de transport/diffusion pour la quantité de mouvement locale  $\rho \vec{u}$ .

5) Un fluide newtonien est un fluide dont la viscosité ne dépend pas de l'état local (taux de cisaillement, écoulement etc). Plus précisément, c'est un fluide pour lequel le tenseur des contraintes et le tenseur taux de déformation sont reliés linéairement. Le ketchup ou la boue sont des exemples de fluides non newtoniens.

# Première partie : instabilité de l'imprimeur

1) On note  $\delta R = R_e - R_i$  la différence des rayons.

$$h(x) = R_e \cos\left(\frac{x}{R_e}\right) - R_i \cos\left(\frac{x}{R_i}\right) + h_0 - \delta R.$$

Pour  $|x| \ll R_i < R_e$ , un développement limité donne

$$\boxed{h(x) = h_0 + \frac{x^2}{2} \left( \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e} \right)} \quad \implies \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e}.$$

On vérifie que  $R$  diverge lorsque  $R_i \rightarrow R_e^-$ .

**2-a)** Un nombre de REYNOLDS dimensionnellement correct est  $Uh_0/\nu$ , dont la valeur numérique est 0.1. D'autres choix sont possibles.

**2-b)** On note  $\partial_x$  la dérivée partielle par rapport à  $x$  et  $\text{ODG}(\mathcal{G})$  l'ordre de grandeur d'une quantité  $\mathcal{G}$ . Le fluide étant incompressible, on a  $\partial_x u_x + \partial_y u_y = 0$ , d'où  $\text{ODG}(\partial_x u_x) = \text{ODG}(\partial_y u_y)$ . En vertu des conditions aux limites visqueuses,  $\vec{u}$  s'annule pour  $y = 0, \forall x$ . Ainsi,  $u_x$  varie de 0 à  $U$  lorsqu'on se déplace dans le film liquide, et l'ordre de grandeur de  $u_x$  ainsi que celui de ses variations est donné par  $U$ . Ces variations "s'étalent" sur une échelle de longueur  $L$ . Par conséquent,  $\text{ODG}(\partial_x u_x) = U/L$ .

L'ordre de grandeur des variations de  $u_y$  est *a priori* différent de  $U$ , et nous le noterons  $U_Y$ . Compte tenu de  $\text{ODG}[h(x)] = h_0$ , on a  $\text{ODG}(\partial_y u_y) = U_Y/h_0$ . La condition d'incompressibilité donne finalement  $U/L \simeq U_Y/h_0$  soit

$$\boxed{U_Y \simeq Uh_0/L \ll U}.$$

**2-c)** Nous devons considérer l'équation (1) avec  $\vec{r}_v = \vec{0}$ . Au lieu d'estimer les ordres de grandeurs de  $\partial_t \vec{u}$ ,  $\nu \nabla^2 \vec{u}$  etc, il est plus rapide de travailler sur les opérateurs eux-mêmes ( $\partial_t$ ,  $\nu \nabla^2$  etc), sachant qu'ils agissent sur  $\vec{u}$ .

Pour estimer l'ordre de grandeur de  $\partial_t$ , on peut remarquer qu'il y a *a priori* deux échelles de temps qui coexistent dans le problème:  $L/U$  et  $h_0/U_Y$ . Les résultats de la question précédente montrent que ces deux échelles sont du même ordre de grandeur, d'où  $\text{ODG}(\partial_t) = U/L$ . Pour le terme convectif:

$$\text{ODG}(\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) = \text{ODG}(u_x \partial_x + u_y \partial_y) = U/L.$$

On obtient le même ordre de grandeur que pour la dérivée temporelle. Enfin, pour la force de viscosité,

$$\text{ODG}(\nabla^2) = \text{ODG}(\partial_x^2 + \partial_y^2) = \frac{1}{L^2} + \frac{1}{h_0^2} \simeq \frac{1}{h_0^2} = \text{ODG}(\partial_y^2).$$

On peut donc négliger  $(\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{u}$  et  $\partial_t \vec{u}$  devant le terme visqueux  $\nu \nabla^2 \vec{u}$  dans l'équation (1), à la condition que<sup>1</sup>

$$\frac{Uh_0}{\nu} \frac{h_0}{L} \ll 1.$$

Il apparaît ainsi que le nombre de REYNOLDS pertinent pour notre écoulement n'est pas  $Uh_0/\nu$ , mais  $Uh_0^2/(L\nu)$ , qui est beaucoup plus petit. On peut remarquer que ce dernier est en réalité le nombre de REYNOLDS "vertical" formé à l'aide de  $U_Y$  et  $h_0$ :  $Uh_0^2/(L\nu) \simeq U_Y h_0/\nu$ .

---

1. la numérotation des équations mentionnées ici est celle de la correction, et diffère de la numérotation de l'énoncé.

Après simplification, l'équation de NAVIER-STOKES s'écrit donc :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}} P = \rho\nu \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial y^2}} \quad (2)$$

**2-d)** L'ordre de grandeur de  $\partial_x P$  est donné par  $\rho\nu U/h_0^2$  tandis que celui de  $\partial_y P$  est  $\rho\nu U_Y/h_0^2$ . Compte tenu de  $U_Y \ll U$ , on a donc  $|\partial_y P| \ll |\partial_x P|$ . Les variations de  $P$  suivant  $x$  sont dominantes par rapport à celles suivant  $y$ , d'où la conclusion que  $P$  dépend essentiellement de  $x$ .

**3** Les conditions aux limites visqueuses imposent  $u_x = 0$  en  $y = 0$  et  $u_x = U$  en  $y = h$ . La projection suivant l'axe des abscisses de l'équation (2) a donc pour solution:

$$\boxed{u_x(x, y) = \frac{1}{2\rho\nu} (\partial_x P) y(y-h) + \frac{U}{h} y.} \quad (3)$$

La dépendance en  $x$  est contenue dans  $h(x)$  et  $\partial_x P$ .

**4-a)** Le débit  $Q$ , indépendant de  $x$  en régime permanent, a pour expression

$$Q = \int_0^{h(x)} u_x dy = \frac{1}{2} U h - \frac{1}{12\rho\nu} h^3 \partial_x P. \quad (4)$$

**4-b)** D'après l'équation (4), le gradient  $\partial_x P$  s'annule pour  $h = \bar{h} \equiv 2Q/U$ . Ainsi,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{6\rho\nu U}{h^2} \left(1 - \frac{\bar{h}}{h}\right) \quad (5)$$

**4-c)** Avec les hypothèses avancées dans l'énoncé,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial P}{\partial x} dx = 0 \quad \implies \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{h^2(x)} = \bar{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{h^3(x)}.$$

Posons  $x = \xi\sqrt{2Rh_0}$ , il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^2} = \frac{\bar{h}}{h_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^3} \quad \implies \quad \frac{\pi}{2} = \frac{\bar{h}}{h_0} \frac{3\pi}{8}$$

à l'aide du formulaire. Ainsi,  $\bar{h} = 4h_0/3$ . Un calcul similaire donne

$$\begin{aligned} P(x) - P_\infty &= \int_{-\infty}^x \frac{6\rho\nu U}{h^2} \left(1 - \frac{\bar{h}}{h}\right) dx \\ &= \frac{6\rho\nu U}{h_0^2} \sqrt{2Rh_0} \left\{ \int_{-\infty}^{x/\sqrt{2Rh_0}} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^2} - \frac{4}{3} \int_{-\infty}^{x/\sqrt{2Rh_0}} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^3} \right\} \\ &= \frac{6\rho\nu U}{h_0^2} \left(\frac{-4}{3}\right) \frac{x}{4[1+x^2/(2Rh_0)]^2} \\ &= -2\rho\nu U \frac{x}{h^2(x)}. \end{aligned}$$

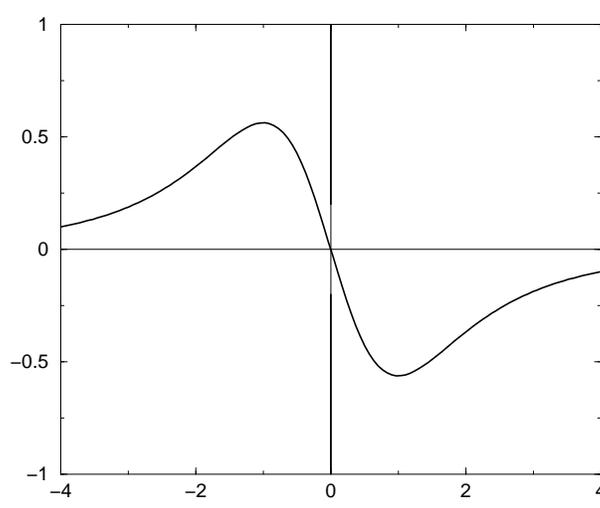


FIG. 1 – Tracé de  $(P - P_\infty)h_0^2/(2\rho\nu U)$  en fonction de  $x/\bar{x}$ .

$P(x) - P_\infty$  est donc une fonction impaire de  $x$ , qui admet ses extrema en  $\pm \bar{x}$  tel que  $h(\bar{x}) = \bar{h} = 4h_0/3$ , soit  $\bar{x} = \sqrt{2Rh_0/3}$ . La figure 1 représente les variations de  $P$  en fonction de  $x$ . Il est possible d'en obtenir l'allure en s'aidant de (2), sans avoir obtenu l'expression explicite  $P(x)$ .

En insérant la relation (5) dans (3), il vient:

$$u_x = \frac{3U}{h^2} y(y - h) \left(1 - \frac{\bar{h}}{h}\right) + \frac{U}{h} y. \quad (6)$$

L'écoulement en question est donc la superposition d'un profil parabolique (écoulement de POISEUILLE), et d'un profil linéaire typique de cisaillement (écoulement de COUETTE). La figure 2 montre le tracé des profils de vitesse pour pour différentes valeurs de l'épaisseur  $h(x)$  du film. On peut également calculer

$$\left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{U}{h^2} [3\bar{h} - 2h]. \quad (7)$$

Cette dernière quantité est directement reliée à la force de traînée visqueuse exercée par le fluide sur la plaque inférieure située en  $y = 0$ . Elle change de signe pour  $h = 3\bar{h}/2 = 2h_0$ . En d'autres termes, la composante  $u_x$  devient négative au voisinage de la paroi lorsque  $h > 2h_0$ , alors qu'elle est positive pour toutes les valeurs de  $y$  au voisinage du point de séparation minimale entre les deux cylindres ( $x = 0$ ). Cela traduit l'existence d'un contre-courant dès que  $h(x) > 2h_0$  (visible sur la figure 2 où l'écoulement pour  $h = 3h_0$  est représenté).

**4-d)** Si  $h(x)$  n'est plus de forme parabolique, l'équation (3) est néanmoins toujours valable, et le débit  $Q$  –constant– toujours donné par (4) (on suppose toujours  $h \ll L$ ). En dérivant (4) par rapport à  $x$ , on obtient l'expression demandée dans laquelle  $\delta(x) = \partial_x h$  est la pente locale.

**5-a)** On pourrait utiliser directement l'expression de  $P(x)$  obtenue à la question 4. Il est plus instructif d'estimer les différents ordres de grandeur en se contentant de la relation (5). L'ordre de grandeur des variations de la pression,  $\Delta P$ , s'estime par  $\text{ODG}(\partial_x P) \times \bar{x}$ . Celui de  $F_\perp$  est l'aire située sous la courbe  $P(x)$  pour les  $x < 0$ ; il s'agit donc de  $\Delta P \times \bar{x}$  puisque l'extremum de pression est atteint sur une échelle de longueur  $\bar{x}$ . Ainsi:

$$\text{ODG}(F_\perp) = \text{ODG}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) (\bar{x})^2 = \frac{\rho\nu U}{h_0} R.$$

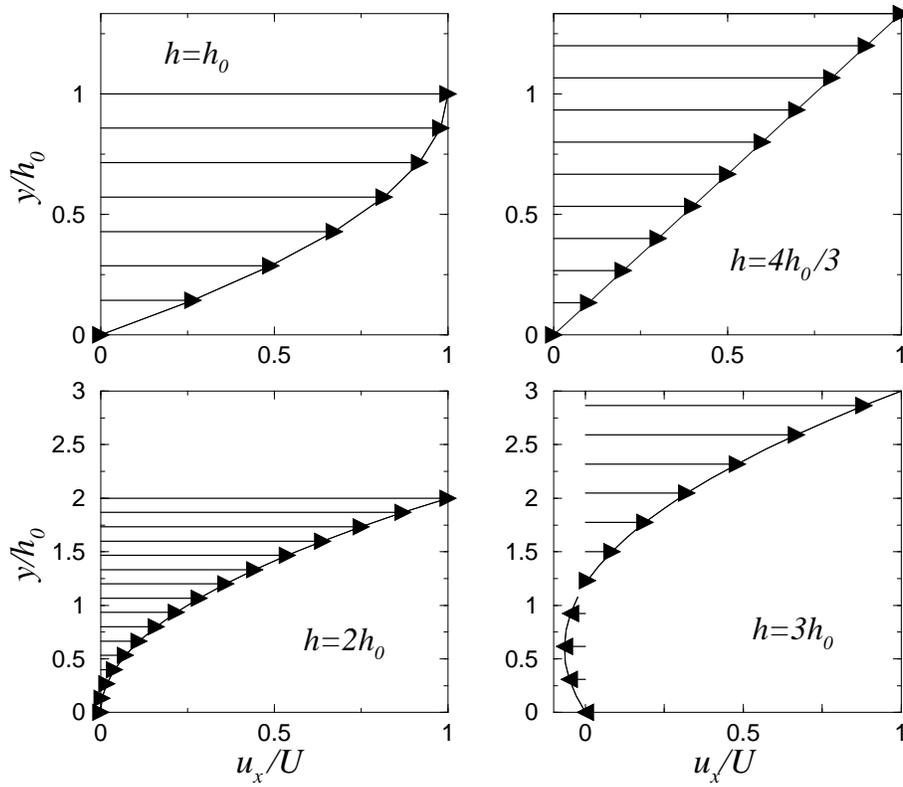


FIG. 2 – Profils de vitesse  $u_x$  en différents points  $x$ . Pour mieux visualiser l'écoulement, les valeurs de  $u_x$  sont représentées en abscisses, et celles de  $y$  en ordonnées.

*Remarque :* avec nos approximations (validité des dépendances en  $x$  étendues de  $x \rightarrow -\infty$  à  $x \rightarrow +\infty$ ), les contributions  $x < 0$  et  $x > 0$  à la force  $F_{\perp}$  s'annulent strictement ( $\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x P dx = 0$ ). En réalité, la présence de ménisques avant et arrière brise la symétrie  $x < 0 \leftrightarrow x > 0$ , et l'estimation que nous avons effectuée donne le bon ordre de grandeur de la force (*i.e.* la bonne dépendance fonctionnelle par rapport aux paramètres du problème :  $h_0, \nu, R, \dots$ ).

**5-b)** La force de traînée visqueuse est reliée au taux de cisaillement : par unité de surface, cette force est donnée par  $\rho\nu\partial_y u_x$ . Il faut intégrer cette contribution surfacique de  $x = -\infty$  à  $x = +\infty$ ). Etant donné que le champ de vitesse  $u_y$  varie sur l'échelle de longueur  $\bar{x}$ , on a

$$\text{ODG}(F_{//}) = \rho\nu \text{ODG}(\partial_y u_x) \bar{x} = \rho\nu U \sqrt{\frac{R}{h_0}}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{F_{//}}{F_{\perp}} \propto \sqrt{\frac{h_0}{R}} \ll 1.}$$

La force de friction visqueuse est petite devant la contrainte normale.

**5-c)** Pour la friction sèche, le rapport  $F_{//}/F_{\perp}$  est donné par le coefficient de friction de COULOMB (d'ordre unité en général), c'est-à-dire bien supérieur à ce que nous observons avec le film liquide, qui joue le rôle d'un lubrifiant.

**6-a)** Le ménisque a deux rayons de courbures principaux:  $r(x)$  et  $\lambda^2/\varepsilon$ . La chute de pression à la traversée du film, est donnée par la loi de LAPLACE (attention aux signes, on peut par exemple

se rappeler que la pression dans une bulle de savon est supérieure à la pression atmosphérique; ici, les deux courbures ont des signes opposés, d'où les contributions de signes opposés dans l'équation qui suit)

$$P_A = P_0 - \frac{\gamma}{r(x_0 + \varepsilon)} + \frac{\gamma\varepsilon}{\lambda^2} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{r(x_0 + \varepsilon)} \simeq \frac{1}{r(x_0)} - \frac{\varepsilon}{r^2(x_0)} \frac{dh}{dx}.$$

La formule demandée s'ensuit, en remarquant que  $P_B = P_A - (d + \varepsilon) \partial_x P$ .

**6-b)** Le point  $C$  est en regard d'un "creux" de la perturbation, contrairement à  $B$  qui correspondait à une "bosse". Il suffit de changer  $\varepsilon$  en  $-\varepsilon$  pour transposer  $P_B$  en  $P_C$  (sinon, refaire le calcul comme dans la question précédente):

$$P_C = P_0 - \frac{\gamma}{r(x_0)} - \frac{\varepsilon\gamma}{r^2(x_0)} \frac{dh}{dx} - (d - \varepsilon) \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\varepsilon\gamma}{\lambda^2}.$$

**6-c)** Le ménisque est stable à la condition que  $P_B > P_C$  (pour qu'il se crée un écoulement transverse de  $B$  vers  $C$ , qui tende à atténuer la déformation de l'interface)

$$P_B > P_C \quad \iff \quad \boxed{\frac{\gamma}{r^2(x_0)} \frac{dh}{dx} \Big|_{x=x_0} + \frac{\gamma}{\lambda^2} > \frac{\partial P}{\partial x}}.$$

Dans la limite de grande longueur d'onde, il vient:

$$\frac{h^2}{r^2} \frac{x}{R} > 6 \text{Ca} \left(1 - \frac{\bar{h}}{h}\right).$$

La position critique  $x_c$  est donnée par le point où l'inégalité précédente devient une égalité.

**6-d)** Si le film entraîné est très mince,  $r(x) \simeq h(x)$ ;  $x_c$  est par conséquent solution de

$$\frac{x_c}{R} = 6 \text{Ca} \left[1 - \frac{\bar{h}}{h(x_c)}\right]. \quad (8)$$

On peut représenter graphiquement la fonction  $6(1 - \bar{h}/h)$  et chercher ses éventuels points de croisement avec la droite  $y = x/(\text{Ca} R)$  (voir la figure 3). Il apparaît que si  $\text{Ca}$  est trop petit, les deux courbes ne se croisent pas si bien que le ménisque est stable. Pour des valeurs de  $\text{Ca}$  plus élevées (ce qui peut être obtenu en augmentant la vitesse  $U$  ou alors la viscosité), les courbes se croisent, et le premier point de croisement  $x_c$  est d'autant plus petit que  $\text{Ca}$  est élevé. La viscosité a pour effet de déstabiliser le ménisque. A l'inverse, la tension de surface a un effet stabilisant (associé au coût énergétique pour déformer une interface comme sur la figure 3 de l'énoncé).

Complément: on peut réécrire l'équation (8) sous la forme

$$\tilde{x}^3 - 6\text{Ca}^* \tilde{x}^2 + 3\tilde{x} + 6\text{Ca}^* = 0 \quad \text{où} \quad \tilde{x} = x_c/\bar{x}, \quad (9)$$

d'où

$$(\tilde{x}^2 - 4\text{Ca}^* \tilde{x} + 1) d\tilde{x} = 2(\tilde{x}^2 - 1) d\text{Ca}^*. \quad (10)$$

Le nombre capillaire critique au delà duquel l'équation (9) admet des solutions réelles positives peut être obtenu en annulant le préfacteur de  $d\tilde{x}$  dans (10) (de manière à ce qu'une faible variation de  $\text{Ca}$  entraîne une brusque variation de  $x_c$ ). Il vient

$$\tilde{x}_{\text{crit}}^2 - 4\text{Ca}_{\text{crit}}^* \tilde{x}_{\text{crit}} + 1 = 0. \quad (11)$$

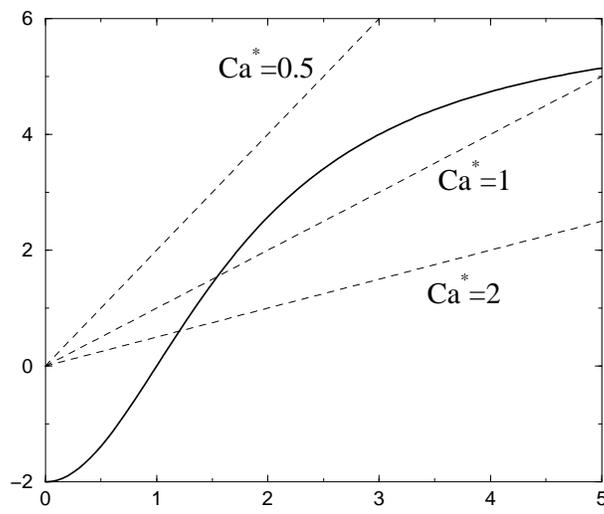


FIG. 3 – Tracé de  $6[1 - \bar{h}/h(x)]$  en fonction de  $x/\bar{x}$  (courbe continue). Les lignes pointillées sont les graphes de  $y = x/Ca^*$  pour différentes valeurs de  $Ca^* = CaR/\bar{x}$ .

Par ailleurs, le couple critique  $(x_{\text{crit}}, Ca_{\text{crit}})$  vérifie également l'équation (9). La solution du système formé de (9) et (11) est

$$\tilde{x}_{\text{crit}} = \sqrt{3 + 2\sqrt{3}} \simeq 2.54 \quad \text{et} \quad Ca_{\text{crit}}^* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3}(3 + 2\sqrt{3})} \simeq 0.73.$$

La figure 3 nous indiquait déjà  $0.5 < Ca_{\text{crit}}^* < 1$ .

7) Nous avons mis en évidence à la question 4 un minimum de pression pour  $x = \bar{x}$ , d'où la possibilité d'un phénomène de cavitation.

8) Dans l'instabilité de digitation visqueuse (dite aussi de SAFFMAN-TAYLOR), la viscosité constitue également le moteur de l'instabilité.

## Deuxième partie : un problème d'intérêt matinal...

**A-1)** L'équation de conservation de la masse s'écrit

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial r w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0.$$

Estimons les ordres de grandeurs:

$$\left. \begin{array}{l} \text{ODG} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r w}{\partial r} \right) = \frac{1}{a} \frac{a W}{h_0} \\ \text{ODG} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) = \frac{V}{a} \end{array} \right\} \implies \frac{W}{V} \propto \frac{h_0}{a} \ll 1.$$

**A-2)** L'ordre de grandeur d'une quantité est *a priori* différent de l'ordre de grandeur des variations de cette quantité, donc  $U \neq V$ . Pour la composante  $w$ , on a néanmoins  $w = 0$  en  $r = a$ , et donc,  $W$  est du même ordre que l'ordre de grandeur de  $w$ .

**A-3)** D'après le formulaire,

$$\hat{\theta} \cdot \nabla^2 \vec{u} = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right].$$

Le premier terme du membre de droite est d'ordre  $V/h_0^2$ , le second et le troisième sont d'ordre  $V/a^2$ , et le dernier terme est d'ordre  $W/a^2$ . Le terme dominant est donc  $r^{-1} \partial_r (r \partial_r v)$ ; il peut lui-même se décomposer en

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}}_{\text{ordre } V/h_0^2} + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}}_{\text{ordre } V/(ah_0)}.$$

Le terme dominant est donc  $\partial_r^2 v$ .

**A-4)** De même,  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} = w \partial_r + r^{-1} v \partial_\theta$ . Ces deux termes sont d'ordre  $W/h_0 \simeq V/a$ , et donc négligeables devant le terme en  $\nu \nabla^2$  lorsque

$$\frac{V}{a} \ll \frac{\nu}{h_0^2} \quad \implies \quad \boxed{\frac{V h_0^2}{\nu a} \ll 1}. \quad (12)$$

**A-5)** On projette l'équation de NAVIER-STOKES sur  $\hat{\theta}$ ; compte tenu des simplifications induites par la condition (12) ci-dessus, on obtient

$$\nu \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \vec{g} \cdot \hat{\theta} = 0 \quad \implies \quad \nu \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = g \cos \theta. \quad (13)$$

**A-6)** En  $r = a$ ,  $v = U$  (et  $w = 0$ ), alors qu'en  $r = a + h(\theta)$ , la continuité de la contrainte visqueuse à l'interface liquide/air impose  $\sigma'_{r\theta} = 0$  (on néglige la viscosité de l'air).

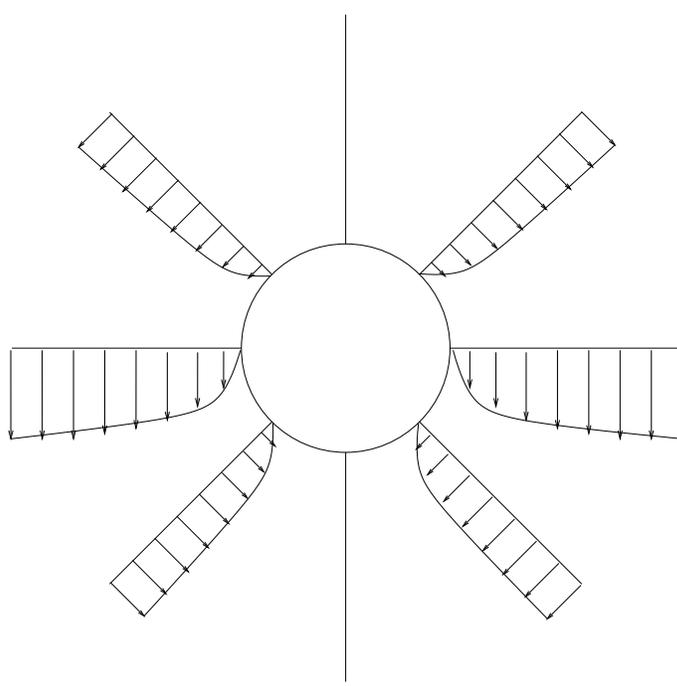


FIG. 4 – Profils de vitesse  $v - U$  pour différentes valeurs de  $\theta$ .

**A-7-a)** On a

$$\sigma'_{r\theta} = \underbrace{\frac{\partial v}{\partial r}}_{\text{ordre } V/h_0} - \underbrace{\frac{v}{r}}_{\text{ordre } V/a} + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}}_{\text{ordre } W/a}.$$

**A-7-b)** Les conditions aux limites pour intégrer (13) sont donc  $v = U = a\Omega$  pour  $r = a$  et  $\partial_r v = 0$  en  $r = a + h$ . Ainsi,

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{g \cos \theta}{\nu} (r - a - h)$$

d'où

$$\boxed{v(r, \theta) = a\Omega + \frac{g \cos \theta}{2\nu} [(r - a)^2 - 2(r - a)h]} \quad (14)$$

Ainsi,  $\beta = \gamma = 1$ . Le profil de  $v - U$  est représenté sur la figure 4.

**A-8)** Intégrons (14) de  $r = a$  à  $r = a + h$ , il vient

$$\boxed{Q(\theta) = Uh - \frac{g \cos \theta}{3\nu} h^3} \quad (15)$$

**A-9)** En régime permanent, la surface libre est vue “immobile”, ce qui signifie  $\vec{u} \cdot \hat{n} = 0$  à l'interface ( $r = a + h$ ), où  $\hat{n}$  est un vecteur perpendiculaire à cette dernière. Comme  $\text{div } \vec{u} = 0$ , on a  $\oint \vec{u} \cdot d^2\vec{S}$  sur toute surface fermée, ce qui implique que  $Q$  est indépendant de  $\theta$ . Cette propriété est donc une conséquence de la conservation du débit.

En  $\theta = 0$ , la force d'entraînement visqueux qu'impose le cylindre tournant au liquide est de direction opposée à la gravité. La vitesse résultante est donc *a priori* plus faible qu'en  $\theta = \pi/2$  ou en  $\theta = \pi$ . Pour que le débit soit néanmoins indépendant de  $\theta$ , il faut que l'épaisseur  $h$  en

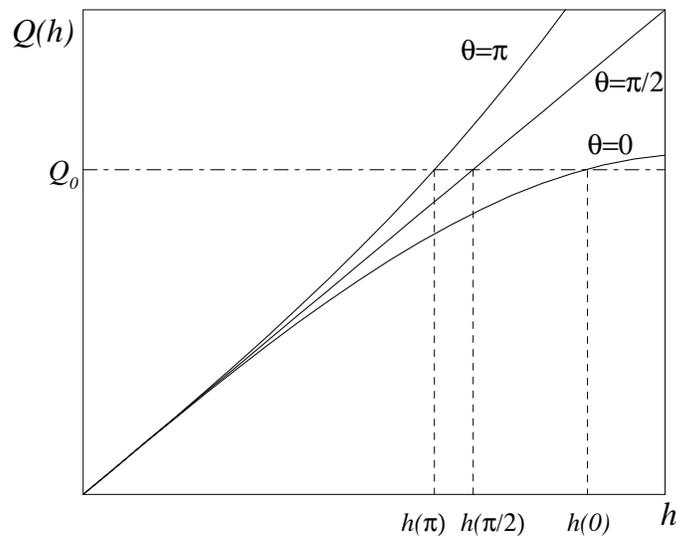


FIG. 5 – Tracé du débit  $Q$  en fonction de la hauteur  $h$ , cf équation (15).

$\theta = 0$  soit plus importante qu'en  $\theta = \pi/2$  ou  $\theta = \pi$ . Le bourrelet se situe donc en  $\theta = 0$  [schéma a) de la figure 5 de l'énoncé].

Ce résultat peut se retrouver à l'aide la formule (15). La figure 5 trace l'allure de la fonction  $Q(h)$  résultante. L'intersection avec une droite horizontale  $Q(h) = Q_0$  pour différentes valeurs de  $\theta$  permet de lire les valeurs de la hauteur. On conclut comme précédemment que  $h(\pi) < h(\pi/2) < h(0)$ .

**A-10)** Evaluons (14) en  $r = a + h$ :

$$v_s(\theta) = U - \frac{g \cos \theta}{2\nu} h^2. \quad (16)$$

Compte-tenu de (15), il vient

$$v_s(\theta) = \frac{3Q}{2h} - \frac{U}{2}.$$

**A-11-a)** D'après l'équation précédente, on a  $h = \frac{3Q}{U(2\tilde{v} + 1)}$ , que l'on reporte dans (16) pour obtenir

$$f(\tilde{v}) = (\tilde{v} - 1)(2\tilde{v} + 1)^2 = -2\alpha \cos \theta \quad \text{avec} \quad \boxed{\alpha = \frac{9gQ^2}{4\nu U^3}}$$

**A-11-b)** La fonction  $f(\tilde{v})$ , représentée sur la figure 6, a ses extrema en  $\pm 1/2$ . Son minimum local est  $f(1/2) = -2$ . D'après la question précédente,  $\tilde{v}$  est l'antécédent par  $f$  de l'intervalle  $[-2\alpha, 2\alpha]$ . Si  $-2\alpha < -2 = f(1/2)$ ,  $\tilde{v}$  ne peut pas être une fonction continue de  $\theta$ , et saute nécessairement d'une branche du tracé de  $f$  à une autre; ainsi,  $\alpha > 1$  est interdit et donc

$$\boxed{\alpha < \alpha^* = 1} \quad \text{d'où} \quad Q < Q_{\max} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\nu U^3}{g}}.$$

**A-12-a)** D'après la relation (15) et compte tenu de  $\alpha = 1$ , la variable  $\eta = Uh/Q$  est solution de

$$\frac{4}{27} \cos \theta \eta^3 - \eta + 1 = 0. \quad (17)$$

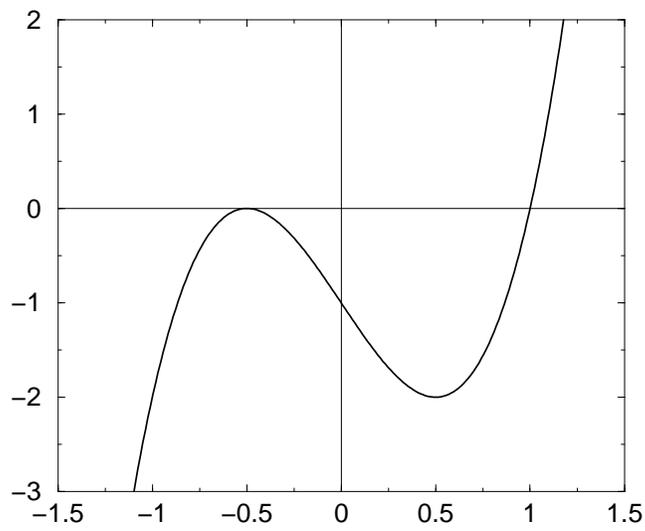


FIG. 6 – Graphe de la fonction  $f(\tilde{v})$

Le graphe de  $\eta$  en fonction de  $\theta$  donné dans l'énoncé montre bien que  $\eta(\pi) < \eta(\pi/2) < \eta(0)$ , ce qui signifie que le bourrelet de liquide se trouve au voisinage de  $\theta = 0$ , comme établi à la question 9.

On peut proposer un calcul perturbatif de  $\eta$  en  $\theta = \pi$  comme suit. Posons  $\eta = 1 + \delta\eta$  avec *a priori*  $|\delta\eta| \ll 1$ . L'équation (17) donne à l'ordre 1 en  $\delta\eta$ :

$$-\frac{4}{27}(1 + 3\delta\eta) - \delta\eta = 0 \quad \implies \quad \delta\eta = -\frac{4}{39} \quad \text{ou} \quad \eta \simeq 0.9 \quad \text{en} \quad \theta = \pi.$$

Cette approximation est raisonnable au vu du tracé  $\eta(\theta)$ .

**A-12-b)** Par définition

$$M = \rho \int_0^{2\pi} h(\theta) a \, d\theta = 2\pi \rho a h_0.$$

Ainsi,

$$M = \rho a \frac{Q}{U} \int_0^{2\pi} \eta(\theta) \, d\theta \simeq 6.641 \rho a \frac{Q}{U} \quad \text{avec} \quad Q = Q_{\max} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\nu U^3}{g}}$$

**A-13)** Dans le cas général  $\alpha \neq 1$ ,  $\eta$  vérifie

$$\eta = 1 + X\eta^3 \quad \text{où} \quad X = \frac{4}{27} \alpha \cos \theta. \quad (18)$$

En cherchant une solution de la forme  $\eta = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ , on obtient la relation de récurrence suivante entre les coefficients:

$$a_l = \sum_{i+j+k=l-1} a_i a_j a_k \quad \text{avec} \quad a_0 = 1. \quad (19)$$

Il vient alors  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3$ ,  $a_3 = 12$ ,  $a_4 = 55 \dots$

Pour la masse du film:

$$M = \rho a \frac{Q}{U} \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left( \frac{4}{27} \alpha \right)^i (\cos \theta)^i \, d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \rho a \frac{Q}{U} \sum_{i=0}^{\infty} a_{2i} \left( \frac{4}{27} \alpha \right)^{2i} \int_0^{2\pi} (\cos \theta)^{2i} d\theta \\
&= \rho a \frac{4\pi}{3} \sqrt{\frac{\alpha \nu U}{g}} \sum_{i=0}^{\infty} a_{2i} \left( \frac{4}{27} \alpha \right)^{2i} \overline{(\cos \theta)^{2i}}. \tag{20}
\end{aligned}$$

Dans l'expression précédente, les valeurs moyennes définies par  $\overline{(\cos \theta)^n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos \theta)^n d\theta$  se calculent explicitement:

$$\overline{(\cos \theta)^n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{p=0}^n C_n^p e^{i\theta p - i\theta(n-p)} d\theta = \frac{1}{2^n} C_n^{n/2} = \frac{1}{2^n} \frac{n!}{[(n/2)!]^2}. \tag{21}$$

On retrouve par exemple  $\overline{(\cos \theta)^2} = 1/2$  et à l'ordre 4:  $\overline{(\cos \theta)^4} = 3/8$ . Il apparaît que  $M$  est une fonction croissante de  $\alpha$  [tous les préfacteurs de  $\alpha^{2i}$  dans (20) sont positifs, en particulier les  $a_i$ , ce que l'on montre par récurrence]:  $M$  croît donc de 0 à la valeur maximale  $M_{\max}$  calculée en 12-b) lorsque  $\alpha$  passe de 0 à 1.

**A-14)** Si la masse initiale est supérieure à  $M_{\max}$  (qui est fonction de  $U$ ), il n'existe pas de solution stationnaire au problème: si l'on prend trop de miel sur la cuiller, il en tombe... à moins de tourner la cuiller plus vite de manière à augmenter  $M_{\max}$  (qui varie comme  $U^{1/2}$ ).

En revanche, pour une valeur de  $U$  donnée, si la masse initiale est inférieure à  $M_{\max}$ , l'équation (20) permet de trouver l'unique valeur de  $\alpha$  possible. On en déduit le débit  $Q$  par  $Q^2 = 4\nu U^3 \alpha / (9g)$ .

**A-15)** Soit  $\gamma$  la tension de l'interface liquide/air. La pression de LAPLACE associée est  $P_\gamma = \gamma/(a+h)$ . Ainsi  $P_\gamma \simeq \gamma/a - \gamma h/a^2$ , et varie d'une quantité  $\gamma \delta h/a^2$  lorsque  $\theta$  varie [on note  $\delta h$  l'ordre de grandeur des variations de  $h(\theta)$ ]. L'échelle de longueur sur laquelle ces variations ont lieu est  $a$ . Le gradient de pression associé est donc d'ordre  $\gamma \delta h/a^3$ . On souhaite pouvoir négliger ce terme devant (par exemple) la force de pesanteur  $\rho g$ , ce qui impose la condition  $\gamma \delta h/a^3 \ll \rho g$ . Lorsque  $\alpha$  est proche de la valeur maximale 1, on a  $\delta h \propto h_0 \simeq Q_{\max}/U \simeq \sqrt{\nu U/g}$ . La condition à vérifier devient donc:  $\gamma/(\rho g a^2) \ll \sqrt{a^2 g/(\nu U)}$ .

**B-1)** La hauteur  $h$  dépend maintenant de  $\theta$  et  $t$ . Puisque  $\text{div } \vec{u} = 0$ , on a  $\partial_r(rw) + \partial_\theta v = 0$ . Ainsi,

$$\int_a^{a+h} \frac{\partial(rw)}{\partial r} dr + \int_a^{a+h} \frac{\partial v}{\partial \theta} dr = 0 = [rw]_{r=a}^{r=a+h} + \int_a^{a+h} \frac{\partial v}{\partial \theta} dr = (a+h)w_{r=a+h} + \int_a^{a+h} \frac{\partial v}{\partial \theta} dr, \tag{22}$$

où l'on a utilisé la condition aux limites de non glissement  $w = 0$  en  $r = a$ . On ne peut pas permuter la dérivée  $\partial_\theta$  et l'intégrale dans le membre de droite de l'équation (22), car  $h$  dépend de  $\theta$ . On peut néanmoins écrire

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_a^{a+h(\theta,t)} v(r, \theta, t) dr = \int_a^{a+h(\theta,t)} \frac{\partial v}{\partial \theta} dr + \left. \frac{\partial h}{\partial \theta} \right|_t v(r = a+h, \theta, t). \tag{23}$$

En effet, soit  $F(y, z) = \int_a^z f(x, y) dx$ . On a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dy} \int_a^{g(y)} f(x, y) dx &= \frac{d}{dy} F[y, g(y)] = \left. \frac{\partial F[y, g(y)]}{\partial y} \right|_z + \frac{dg}{dy} \left. \frac{\partial F[y, g(y)]}{\partial z} \right|_y \\
&= \int_a^{g(y)} \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_x dx + \frac{dg}{dy} f[g(y), y].
\end{aligned}$$

En définitive, en insérant (23) dans (22), on obtient la relation demandée

$$(a+h)w_{r=a+h} + \frac{\partial}{\partial \theta} \int_a^{a+h(\theta,t)} v(r, \theta, t) dr = \frac{\partial h}{\partial \theta} \Big|_t v(r = a+h, \theta, t). \quad (24)$$

**B-2)** Comme  $h$  ne dépend pas de  $r$ , son gradient n'a de composante que suivant  $\hat{\theta}$  et donc:

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} \Big|_{\theta} + \left( \vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) h(\theta, t) = \frac{\partial h}{\partial t} \Big|_{\theta} + \frac{v}{a+h} \frac{\partial h}{\partial \theta} \Big|_t.$$

Par ailleurs, considérons une particule fluide située à l'interface, à l'instant  $t$  et pour une valeur donnée de  $\theta$ . Cette particule a une vitesse "verticale" (c'est-à-dire suivant  $\hat{r}$ ) donnée par  $w(r = a+h, \theta, t)$ . Après un petit intervalle de temps  $\delta t$ , cette particule se trouvera de nouveau à l'interface, en  $r = a+h(\theta, t) + w\delta t$ . Ainsi, lorsque l'on suit les particules fluides dans leur mouvement (description LAGRANGIENNE), les variations de  $h$  sont directement données par  $w$ :

$$\frac{Dh}{Dt} \Big|_{\theta} = w[r = a+h, \theta, t].$$

Dans ces conditions,

$$w[r = a+h, \theta, t] \simeq \frac{\partial h}{\partial t} \Big|_{\theta} + \frac{v}{a} \frac{\partial h}{\partial \theta} \Big|_t,$$

où  $v$  est évaluée en  $r = a+h$ . L'équation (24) devient donc:

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta} \Big|_t \simeq -a \frac{\partial h}{\partial t} \Big|_{\theta}. \quad (25)$$

On retrouve le résultat établi dans la partie A : en régime permanent,  $\partial_{\theta} Q = 0$ .

**B-3)** On peut poser le changement de variables  $h(\theta, t) = \tilde{h}(Q, \theta)$ , étant entendu que  $Q$  est fonction du couple  $(\theta, t)$ . On obtient alors

$$\frac{\partial h}{\partial t} \Big|_{\theta} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial Q} \Big|_{\theta} \frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{\theta}. \quad (26)$$

De plus,  $dQ = \frac{\partial Q}{\partial t} dt + \frac{\partial Q}{\partial \theta} d\theta$ . La condition  $dQ = 0$  donne donc

$$\frac{d\theta}{dt} = - \frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{\theta} \left( \frac{\partial Q}{\partial \theta} \Big|_t \right)^{-1}.$$

En utilisant (25) et (26), on obtient le résultat demandé

$$\boxed{a \frac{d\theta}{dt} = \left( \frac{\partial \tilde{h}}{\partial Q} \Big|_{\theta} \right)^{-1}}.$$

**B-4)** D'après la question précédente,

$$T(Q) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\theta} d\theta = a \int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial Q} \Big|_{\theta} d\theta = a \frac{d}{dQ} \int_0^{2\pi} \tilde{h}(Q, \theta) d\theta.$$

En régime dépendant du temps, on peut toujours négliger les termes instationnaires en  $\partial_t$  [en reprenant le raisonnement proposé à la question 2-c) de la première partie], et inertiels en  $\vec{u} \cdot \text{grad}$  devant le terme de viscosité pourvu que la condition  $Vh_0^2/(\nu a) \ll 1$  soit vérifiée. En particulier, les expressions (14), (15) et (20) sont encore valables et on peut développer  $\eta = Uh/Q$  en série entière:

$$\eta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left( \frac{4}{27} \alpha \cos \theta \right)^n. \quad (27)$$

Dans cette expression, les coefficients  $a_i$  sont toujours donnés par (19). Ainsi :

$$\begin{aligned} T(Q) &= a \frac{d}{dQ} \int_0^{2\pi} \frac{Q}{U} \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left( \frac{4}{27} \alpha \cos \theta \right)^i d\theta \\ &= \frac{a}{U} \frac{d}{dQ} \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \left( \frac{Q}{Q_0} \right)^{2i} Q (\cos \theta)^i d\theta, \end{aligned}$$

où  $Q_0 = U^3 \nu / g$  et la relation  $\alpha = 9gQ^2/(4\nu U^3)$  a été utilisée. Dans l'intégrale donnant  $T(Q)$ , les termes où  $i$  est impair s'annulent par symétrie et

$$T(Q) = \frac{2\pi a}{U} \sum_{i=0}^{\infty} (4i+1) \frac{a_{2i}}{3^{2i}} \left( \frac{Q}{Q_0} \right)^{4i} \overline{(\cos \theta)^{2i}},$$

où les valeurs moyennes  $\overline{(\cos \theta)^{2i}}$  sont données par (21). Ainsi,

$$T(Q) = \frac{2\pi a}{U} \left[ 1 + \frac{5}{6} \left( \frac{Q}{Q_0} \right)^4 + \frac{55}{24} \left( \frac{Q}{Q_0} \right)^8 + \dots \right]$$

5) Les  $a_i$  étant tous positifs, la fonction  $T(Q)$  est strictement croissante. Cela signifie que les tranches de  $Q$  élevé mettent plus de temps à faire un tour du cylindre que celles correspondant à un faible débit. Ainsi, dans une région où  $\partial_\theta Q > 0$ , le gradient de  $Q$  croît, les petites valeurs de  $Q$  "rattrapant" les grandes. Cela crée une discontinuité dans la fonction  $Q(\theta)$ , et donc une discontinuité de hauteur  $h$ . Nos approximations de variations douces ne sont alors plus valables ; cette "catastrophe" est la signature de l'instabilité des solutions stationnaires du problème [toute perturbation par rapport à la solution stationnaire  $\partial_\theta Q = 0$  est telle que  $\partial_\theta Q > 0$  dans certaines régions puisque  $Q(0) = Q(2\pi)$  ; cette perturbation crée donc nécessairement une discontinuité].