THERMODYNAMIQUE – TD n^{o} 1 :
Entropie et information

Benjamin Langlois, Swann Piatecki et Guilhem Semerjian

Février 2012

1 Probabilités conditionnelles

Une maladie est présente chez 1% de la population. Le test de dépistage est positif chez 95% des malades et négatif chez 97% des personnes saines.

1. Exprimer de deux façons la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population soit malade et voie son test positif.
2. Exprimer de deux façons la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population soit saine et voie son test positif.
3. Une personne voit son test positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ?

2 Expression de l'entropie de Shannon

On cherche à retrouver l'expression de l'entropie de Shannon. On se place tout d'abord dans le cas d'une variable discrète. On considère un ensemble de M évènements se déroulant avec une probabilité $p_1, \dots, p_M$ (ou bien une variable aléatoire x prenant les valeurs $x_1, \dots, x_M$ avec les probabilités $p_1, \dots, p_M$). A l'instar de Shannon, on cherche à définir une fonction $S(p_1, \dots, p_M)$ qui quantifie le manque d'information sur la réalisation de tel ou tel évènement. Pour cela, on impose à S un certain nombre de propriétés que l'on estime raisonnables :

(P1) la fonction S est une fonction continue des probabilités $p_1, \dots, p_M$

(P2) $S(p_1, \dots, p_M) \leq S(1/M, \dots, 1/M)$

(P3) $S(p_1, \dots, p_M, 0) = S(p_1, \dots, p_M)$

(P4) propriété d'additivité : soient A l'évènement global correspondant aux évènements de 1 à m de probabilité $q_A = \sum_{i=1}^{m} p_i$ et B l'évènement global correspondant aux évènements de $m+1$ à M de probabilité $q_B = \sum_{i=m+1}^{M} p_i$. Alors on a :

$$S(p_1, \dots, p_M) = S(q_A, q_B) + q_A\, S\left(\frac{p_1}{q_A}, \dots, \frac{p_m}{q_A}\right) + q_B\, S\left(\frac{p_{m+1}}{q_B}, \dots, \frac{p_M}{q_B}\right)$$

On va montrer que l'expression $S(p_1, \dots, p_M) = -k \sum_{i=1}^{M} p_i \ln p_i$ est bien la seule solution.
On note $\sigma(M) = S(1/M, \dots, 1/M)$ l'entropie du cas équiprobable.

1. Justifier la pertinence des postulats ci-dessus.
2. Montrer que $\sigma(M)$ est une fonction croissante de M.
3. Montrer que $S(1) = 0$. Commenter.
4. Généraliser la quatrième propriété pour montrer que

$$S(p_1, \dots, p_{m_1}, \dots, p_{m_2}, \dots, p_{m_\alpha}) = S(q_1, \dots, q_\alpha) + \sum_{i=1}^{\alpha} q_i\, S\left(\frac{p_{m_{i-1}+1}}{q_i}, \dots, \frac{p_{m_i}}{q_i}\right)$$

   avec $q_i = p_{m_{i-1}+1} + \ldots + p_{m_i}$ ($m_0 = 0$).

5. En déduire que $\sigma(MN) = \sigma(M) + \sigma(N)$.

6. Soient $(l, m, n) \in \mathbb{N}^3$ tels que $2^m \leq l^n < 2^{m+1}$. Montrer que :

$$\frac{m}{n} \leq \frac{\sigma(l)}{\sigma(2)} < \frac{m+1}{n} \ .$$

   En déduire que $\sigma(M) = k \ln M$. Quel est le signe de k ?
7. En déduire que, pour $(p_1, \ldots, p_M) \in \mathbb{Q}^M$, $S(p_1, \ldots, p_M) = -k \sum_{i=1}^{M} p_i \ln p_i$.
8. En déduire l'entropie de Shannon dans le cas discret pour des probabilités quelconques.
9. Généraliser au cas continu. Pour fixer les idées, on considèrera le cas d'une variable aléatoire x prenant des valeurs continues sur un intervalle $[a, b]$.

3 Dé pipé

En lançant un dé à six faces, on constate que le 6 sort deux fois plus souvent que le 1. En l'absence d'information supplémentaire, quelle est la loi de probabilité des faces du dé à laquelle on peut s'attendre ?