

4°) Le groupe de renormalisation

a) Etat des lieux

Approches décrites jusqu'ici donnent compréhension phénoménologique des phénomènes critiques, mais ne donnent pas d'explication pour pts suivants :

⊛ existence de classes d'universalité, caractérisées par un jeu donné d'exposants critiques.

⊛ curiosités concernant les exposants critiques

Universality class	Symmetry of order parameter	α	β	γ	δ	ν	η	Physical examples
2-d Ising	2-component scalar	0 (log)	1/8	7/4	15	1	1/4	some adsorbed mono e.g. H on Fe
3-d Ising	2-component scalar	0.10	0.33	1.24	4.8	0.63	0.04	phase separation, flu order-disorder e.g. β
3-d X-Y	2-dimensional vector	0.01	0.34	1.30	4.8	0.66	0.04	superfluids, supercon
3-d Heisenberg	3-dimensional vector	-0.12	0.36	1.39	4.8	0.71	0.04	isotropic magnets
mean-field		0 (dis.)	1/2	1	3	1/2	0	
2-d Potts, $q=3$ $q=4$	q -component scalar	1/3 2/3	1/9 1/12	13/9 7/6	14 15	5/6 2/3	4/15 1/4	some adsorbed mono e.g. Kr on graphite

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2$$

$$\alpha + \beta(1 + \delta) = 2$$

$$d\nu = 2 - \alpha$$

$$(2 - \gamma)\nu = \gamma$$

Sur base d'arguments thermodynamiques, on peut remplacer t_0 $\rightarrow$ t_0 par des $\geq$. Par exemple,

Babson

p331

$$\chi_T (c_B - c_n) = T \left(\frac{\partial \Pi}{\partial T} \right)_B^2 \quad \text{et } c_n \geq 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\chi_T c_B}_{|t|^{-\alpha} |t|^{-\gamma}} \geq \underbrace{T \left(\frac{\partial \Pi}{\partial T} \right)_B^2}_{|t|^{2(B-1)}} \Rightarrow -\alpha - \gamma \leq 2B - 2 \quad (< 0)$$

Toutefois, il semble bien que égalités tiennent... explication?

- ⊛ Les exp critiques prennent m valeur à droite et à gauche de T_c
- ⊛ En dimension 2, les exp critiques sont souvent fractions rationnelles (plus anecdotique).

Telle était situation en 1971 quand K. Wilson a publié son 1^{er} article décrivant groupe de renormalisation. But : tirer profit de $\beta = \infty$ au pt critique.

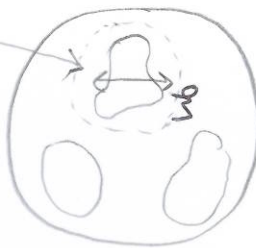
Idée : réduire systématiquement le nbre de d.d.l. en intégrant sur les fluctuations de courte longueur d'onde. Partant par ex d'un système de spins sur réseau maille a , $\lambda_{\min} \sim a$. Intégrons sur les longueurs d'onde $a \leq \lambda \leq b \cdot a$ (b facteur de dilatation) $\rightarrow$ fait correspondre au système physique initial un autre système physique, qui possède m comportement à gde distance ($r > b \cdot a$). $\hookrightarrow$ hamiltonien $\neq$ $\rightarrow$ du sens "fonction de partition"

Une telle transformation — que l'on peut itérer — peut être visualisée en imaginant qu'on observe le système physique avec deux microscopes : l'un de résolution $\sim a$, l'autre, de résolution mais borne $b \cdot a$. En passant du 1^{er} au 2nd microscope, on "intègre" au tas les détails ayant dimension entre a et $b \cdot a$. ds le champ du 2nd microscope, les îlots d'aimantation positive (par ex) seront vers b fois plus petits que ds le champ du premier (suppose β finie).

NB : on peut définir β par fonction corrélation $T(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$, mais aussi par $\frac{\langle \sum_{i,j} |\vec{r}_i - \vec{r}_j| S_i S_j \rangle}{\langle \sum S_i S_j \rangle}$



microscope 1



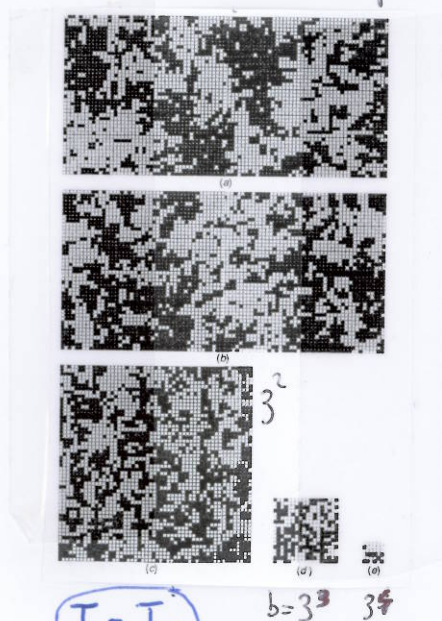
microscope 2

pas avoir vu
trop naïve

Noter toutefois l'existence de régions connectées, sur toutes les distances $r \ll \xi$:
une fluctuation n'est pas une région où tous les spins sont alignés, mais inclut fluctuations
taille plus petite etc... jusqu'à échelle a (pas réseau) $\rightarrow$ (ne pas confondre une
fluctuation de taille ξ , avec domaine en g^d de taille $\gg \xi$.)

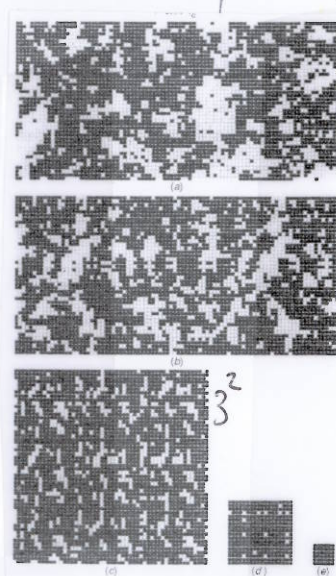
Au point critique, les fluctuations ont toutes tailles possibles $\rightarrow$ images analogues
des 2 microscopes. (après qqs itérations, histoire d'oublier détails microscopiques)

Illustration sur Ising 2D où en fait de microscope, on remplace des blocs de
spins 3×3 , par un spin ayant m même valeur que majorité des 9 spins décomposés.



$T = T_c$

$b = 3^3 \quad 3^4$



$T = 0.99 T_c$

$\rightarrow$ fluctuations / état
ordonné sont graduellement
supprimées ... système
évolue vers " $T_{eff} = 0$ ".
On s'éloigne du point
critique (cf route)

$\hookrightarrow$ peu de changement par itération de
procédure ... fluctuations à toutes échelles.

Regroupement de spins en blocs : une stratégie possible pour intégrer une fluctuation de
certain longueur d'onde. Ce n'est pas la seule.

Ainsi, grpe de renormalisation a pour effet de modifier l'échelle de longueur d'l pb en supprimant d.d.l (détail micro). Il n'y a qu'un point critique que le système est invariant par changement d'échelle (rappel: $T(r) \sim \frac{1}{r^{(\dots)}}$, algébrique, pas d'échelle de longueur caractéristique de cette loi, par opposition à $\frac{1}{r^{(\dots)}} \exp(-r/\xi)$ pour $T \neq T_c$) $\Rightarrow$ comportement critique } pas tout à fait correct !.

correspond à point fixe d'une transformation du grpe de renormalisation. On tend vers pt fixe asymptotiquement en itérant T sur K , mais un syst critique ne constitue pas lui-même un point fixe. Pourquoi parle t-on de groupe? Itérer 2 fois transfo avec dilatation b est $\Leftrightarrow$ à 1 transfo avec dilatation $b^2 \rightarrow$ associativité produit. Pais: les transformations considérées n'ont pas d'inverse; terme de "groupe" est abusif; on devrait parler de semi-groupe ($\neq$ semi-groupe; autre pb: semi-groupe traduit par "semi-group" en anglais).

4/b) Définition d'une transformation du groupe de renormalisation

Modèle initial, décrit par hamiltonien $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}/kT$; transformé en un nouveau système décrit par hamiltonien réduit $\tilde{\mathcal{H}}'$; on note symboliquement $\tilde{\mathcal{H}}' = R \tilde{\mathcal{H}}$ où l'opérateur du grpe de renormalisation R fait décroître le nombre de degrés de liberté de N à N' . Cette réduction peut s'opérer (ex des systèmes de spins)

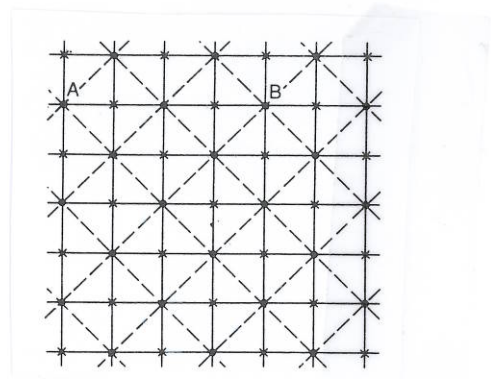
* dans espace réel en regroupant, en supprimant spins

* ds " Fermion en intégrant sur les grands vecteurs d'onde

Le facteur d'échelle de transformation est donné par $b^d = \frac{N}{N'}$.

Ex de renormalisation du réseau carré avec $b = \sqrt{2}$. Réseau initial , final  on supprime sites marqués d'une * - Réseau reste carré avec $N' = N/2$

$$e^{-\tilde{\mathcal{H}}'} = \sum_{\text{spins } *} e^{-\tilde{\mathcal{H}}} \rightarrow \text{trace partielle}$$



Condition essentielle que doit satisfaire toute transformation R :

FIP 106
L3

$$Z_{N'}(\tilde{\mathcal{H}}') = Z_N(\tilde{\mathcal{H}})$$

d'énergie libre étant extensive, cela implique, pour l'énergie libre par spin $\tilde{f} = \tilde{F}/kT$

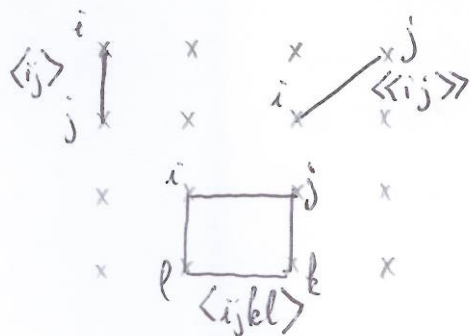
$$\tilde{f}(\tilde{\mathcal{H}}') = b^d \tilde{f}(\mathcal{H})$$

Pour pouvoir comparer les systèmes avant et après transformation, utile de mesurer les longueurs en terme du pas du réseau ie $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r}/b$

On a aussi $\xi' = \xi/b$ (longueur de corrélation). A un point de fixe de R ($\tilde{\mathcal{H}}^* = R \tilde{\mathcal{H}}^*$), on a $\xi' = \xi$, qui n'est compatible avec $\xi' = \xi/b$ que pour $\xi = \infty$ (solution $\emptyset$ exclue). On retrouve la correspondance pt fixe de $R \Leftrightarrow$ pt critique avec longueur de corrélation divergente

Pour poursuivre discussion, introduisons notion d'espace des paramètres associé au hamiltonien. Un syst. phys à t^0 donnée est repéré par vecteur $\vec{\mu}$ dans cet espace.

Par ex, pr Ising $\tilde{\mathcal{H}} = K_1 \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j + K_2 \sum_{\langle\langle ij \rangle\rangle} S_i S_j + K_3 \sum_{\langle ijkl \rangle} S_i S_j S_k S_l$



Ici, $\vec{\mu}$ correspond à donnée des constantes de couplages

$$\vec{\mu} = (K_1, K_2, \dots, K_n, \dots)$$

$\hookrightarrow$ espace de dimension infinie

Pourtant de $K_1 \neq 0, K_2 = K_3 = \dots = 0$, les transformations successives R , génériquement, engendrent couplages $K_2 \neq 0, K_3 \neq 0$ etc. Le but est de trouver le point fixe

$$\vec{\mu}^* = R \vec{\mu}$$

$\hookrightarrow$ sauf en 1D.

4) c) Points fixes et universalité

Comportement de la transformation (et donc de $\vec{\mu}$) au voisinage d'un point fixe : $\vec{\mu} = \vec{\mu}^* + \delta\vec{\mu}$ et par développement Taylor

$$\delta\vec{\mu}' = \vec{A}(\vec{\mu}^*) \delta\vec{\mu} \quad \left(A_{ij} = \left. \frac{\partial \mu'_i}{\partial \mu_j} \right|_{\mu^*} \right)$$

On note $(\lambda_i, \vec{r}_i)$ les vecteurs propres / val. propres de la matrice constante $\vec{A}$: $\vec{A} \vec{r}_i = \lambda_i \vec{r}_i$. Les valeurs propres dépendent du facteur d'échelle b . Appliquons successivement deux transformations de facteurs b_1 et b_2 revient à appliquer transfor $b_1 b_2 \Rightarrow$

$$\lambda_i(b_1) \lambda_i(b_2) = \lambda_i(b_1 b_2) \Rightarrow \lambda_i(b) = b^{y_i}$$

Les y_i sont reliés aux exposants critiques $(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$, et permettent d'en comprendre l'universalité (une fois qu'on a admis que les y_i déterminent les exp. critiques, cf + lair)

La matrice $\vec{A}$ n'est pas symétrique, il n'y a aucune raison que ses valeurs propres soient réelles, et que ses vecteurs propres forment un ensemble complet. On suppose malgré tout que c'est le cas, pour illustrer méthode. On écrit alors

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}^* + \sum_i g_i \vec{r}_i \quad ; \quad g_i \equiv \text{champ d'échelle ("scaling field")}$$

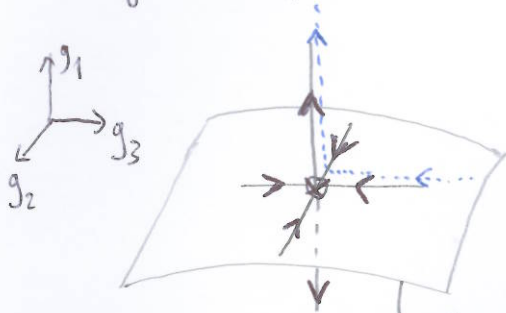
$$\hookrightarrow \vec{\mu}' = \vec{\mu}^* + \sum_i b^{y_i} g_i \vec{r}_i \quad , \text{ soit aussi } g'_i = b^{y_i} g_i$$

Il y a donc trois cas à distinguer :

- $y_i > 0$: le champ d'échelle croît par itération de la transfor gpe renormalisante ce qui éloigne syst. du pt fixe ; on parle de champ essentiel ("relevant scaling field")
- $y_i < 0$: champ inessentiel ("irrelevant")
- $y_i = 0$: champ reste constant à l'approximation linéaire. Pour décider de son comportement, aller au delà de cet approx
 $\hookrightarrow$ champ marginal. On exclut ce cas de figure ici

Ces notions (essentiel etc) sont définies par rapport à un point fixe particulier.

→ Stabilité du point fixe dépend du nbre champs essentiels et inessentiels. On appelle **surface critique** l'ensemble des points de l'espace des paramètres qui tendent vers pt fixe par itération de R (on est amené à supposer b continue, p que les trajectoires de l'espace des param sont bien continues, et non ensemble de pts discrets). Par ex, s'il y a un champ essentiel (g_1) et deux champs inessentiels (g_2 et g_3): la surface critique est localement (hyper)plan au voisinage pt fixe.



Surface critique, définie localement par $g_1 = 0$, s'écarte de forme plane qd on s'écarte pt critique.

Trajectoire ---- commence proche de surface critique, mais on dehors; le système se rapproche du pt fixe, avant de s'en éloigner au fur et à mesure qu'on l'observe sur grandes échelles. 2D avec $T = 0.99 T_c$, page 104.

Noter que puisque la longueur de corrélation ne peut que décroître par une TGR (transformée de renormalisation), tous les points de la surface critique ont une longueur de corrélation infinie (au point fixe, $\beta = +\infty$)

→ Considérons une surface critique avec un unique point fixe. Cette surface critique est le lieu des points critiques par toute une famille de systèmes avec des hamiltoniens $\neq 0$. Un système proche de son pt critique se trouve près de la surface critique. Après changement d'échelle, champs inessentiels $\rightarrow$, champs essentiels $\nearrow$, mais si ces derniers sont initialement assez petits, le système passe près du pt fixe, avant de s'éloigner de la surface critique.

↳ son comportement critique est déterminé par transformation linéarisée $A(\vec{p}^*)$ et ne dépend pas de la valeur initiale des champs inessentiels

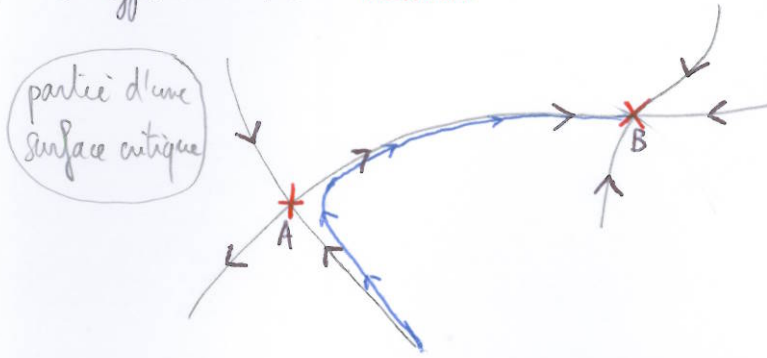
↳ tous les systèmes qui passent près du point fixe, indépendamment de leur point de départ dans l'espace paramètres, présentent m comportement critique (gouverné par les y_i)

Rq: nous n'avons défini la notion de champ essentiel / inessentiel qu'au voisinage du pt critique, ds domaine linéaire de R.
Nécessité d'étendre cette notion au régime non-linéaire, pour donner un sens à ce qui précède $\rightarrow$ techniquement plus complexe

FIP 109
L3

$\rightarrow$ Il peut exister plus d'un point fixe sur une surface critique.

$\hookrightarrow$ effet dit de "crossover".



Ici, A a un chp essentiel, un inessentiel alors que B en a deux inessentiels (sur surface critique, ne peut oublier l'existence de champ(s) essentiel(s) de direction(s) $\perp$ à surface critique).

Trajectoires passent d'abord au voisinage de A, avant d'être entraînées vers B par un champ essentiel (et de s'en éloigner sans action d'un autre champ essentiel non représenté, $\perp$ à surface critique). En s'approchant de T_c , on voit d'abord cpt critique de type A, avant de voir un cpt de type B $\rightarrow$ "crossover".

Illustration: système magnétique avec faible anisotropie de spin

A $\equiv$ pt fixe Heisenberg

B $\equiv$ pt fixe Ising

On ne ressent anisotropie (et donc cpt Ising) que pour T très proche de T_c .

4-d) Changements d'échelle et exposants critiques

$\rightarrow$ Exposants critiques:

Avec $\vec{\mu}' = R \vec{\mu}$, on a $\tilde{f}(R\vec{H}) = b^d \tilde{f}(\vec{H})$, qui devient, au voisinage d'un point fixe: $\tilde{f}(g_1, g_2, \dots) = b^{-d} \tilde{f}(b^{y_1} g_1, b^{y_2} g_2, \dots)$ /.

$\tilde{f}$ est une fonction homogène généralisée.

Pour relier les y_i aux exposants critiques, faut identifier les champs d'échelle.

Ds la plupart des systèmes magnétiques, il y a 2 variables à ajuster pr trouver pt critique:

température et champ magnétique. On note $t = \frac{T-T_c}{T_c}$, $h = B/kT$.

FIP 110
L3

On suppose que ce sont les 2 seules variables essentielles:

$$\left\| \tilde{f}(t, h, g_3, \dots) \propto b^{-d} \tilde{f}(b^{y_1} t, b^{y_2} h, b^{y_3} g_3, \dots) \text{ pour } \begin{pmatrix} t \\ h \\ g_3 \end{pmatrix} \rightarrow 0 \right.$$

lien avec α ? On a $C \propto \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial t^2} \Big|_{h=0} \propto |t|^{-\alpha}$

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial t^2} \Big|_{h=0} \propto b^{-d+2y_1} \left(\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial t^2} \Big|_{b^{y_1} t, 0, 0, \dots} \right) \rightarrow \text{variables non pertinentes mises à 0}$$

Pour extraire la dépendance en t du membre de droite, on peut choisir b tel que $b^{y_1}/|t| = 1 \Rightarrow \tilde{f}_{tt} \propto |t|^{(d-2y_1)/y_1} \tilde{f}_{tt}(\pm 1, 0, \dots, 0) \Rightarrow \alpha = 2 - d/y_1$

De même, on obtient $\gamma = (2y_2 - d)/y_1$, $\delta = y_2/(d - y_2)$. Par l'aimantation:

$$m \propto \frac{\partial \tilde{f}}{\partial h} \propto b^{-d+y_2} m(b^{y_1} t, b^{y_2} h, \dots)$$

$$\Rightarrow m(t, h) \propto |t|^{(d-y_2)/y_1} m(\pm 1, h|t|^{-y_2/y_1})$$

On en tire 2 informations intéressantes: d'une part, et d'autre part, en définissant

$$B = (d - y_2)/y_1 \Rightarrow B\delta = y_2/y_1$$

$$\begin{cases} \tilde{m} \equiv \frac{m(t, h)}{|t|^B} \\ \tilde{h} = h|t|^{-B\delta} \end{cases}$$

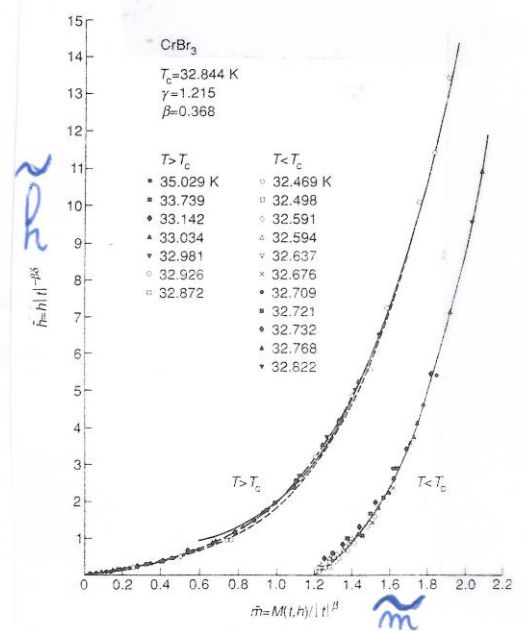
il vient: $\tilde{m} \propto m(\pm 1, \tilde{h})$

et donc... tracer $\tilde{m}$ en fonction de $\tilde{h}$ (passage 3 variables (m, t, h) à 2)

donne une courbe unique pour $T > T_c$ ($\forall T$)

et une autre pour $T < T_c$ ($\forall T$... pas trop loin de T_c tout de même).

cf expériences sur CrBr_3 (Ho et Lester, PRL 22, 603, 1969)



↳ précède avènement grpe renormalisation...

les idées d'échelle lui sont un peu antérieures (Kadanoff, 1966).

On notera finalement que les relations précédentes impliquent

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2$$

$$\alpha + \beta(1+\delta) = 2, \text{ mentionnés plus haut au chapitre des amonités.}$$

Les deux relations manquantes impliquent ν et η qu'il faut relier aux y_i .

Pt de vue heuristique: on vient de voir que les longueurs se comportent comme $b \propto |t|^{-1/y_1}$; c'est aussi le cas de $\xi \propto |t|^{-\nu} \Rightarrow \nu = 1/y_1$

La dernière relation se déduit de

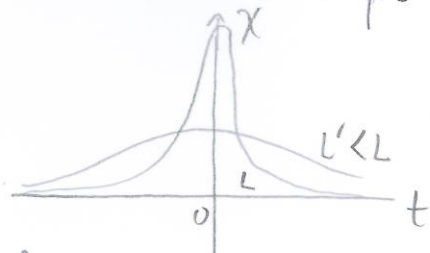
$$\chi_T \propto \frac{\int \Gamma(r) r^{d-1} dr}{\xi^{2-\eta}} \Rightarrow \gamma = (2-\eta)\nu$$

→ Application: "finite-size scaling", utile pour simulations numériques

Au voisinage du pt critique, ξ diverge. Cela semble condamner toute approche de simulation numérique, nécessairement limitée à tailles assez petites (qq's centaines tailles moléculaires). Une simulation doit être faite de système de taille $L \gg$ toute échelle microscopique, d'où $L \gg \xi \rightarrow$ impossible près de T_c .

Technique "finite size scaling" tourne ce défaut apparent en avantage, et permet d'utiliser simulations pour étudier comportement critique (introduite par H. Fisher de années 1970, bcp perfectionnées depuis). Idée: exploiter flexibilité des simulations pour varier L + arguments d'échelle: près de T_c , la longueur de corrélation est la seule échelle pertinente dans le problème.

Considérons par ex susceptibilité $\chi(t, L)$. $\chi(t, \infty)$ diverge pour $t \rightarrow 0$, et on s'attend à ce que $\chi(t, L)$ présente une borne au voisinage de $t=0$



$\frac{\chi(t, L)}{\chi(t, \infty)}$ est une q^{ti} sans dimension qui dépend de L , et de t . La seule q^{ti} sans dimension que l'on puisse

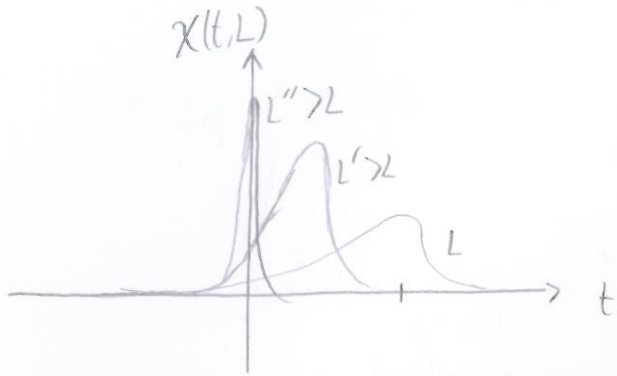
former avec L est $\frac{L}{\xi_\infty(t)}$ à $\xi_\infty(t)$ est longueur de corrélation du système infini ($\xi_\infty \propto |t|^{-\nu}$)

On suppose ici que détail moléculaire non pertinent près de T_c .

On a alors $\frac{\chi(t, L)}{\chi(t, \infty) \rightarrow t \rightarrow 0} = \varphi\left(\frac{L}{\xi_\infty(t)}\right)$ $\nearrow$ fonction d'échelle

FIP 112
L3

$$\Rightarrow \chi(t, L) = |t|^{-\gamma} \varphi(L|t|^\nu) = L^{\delta/\nu} \psi(L|t|^\nu)$$



Si borne il y a, elle se trouve en

$$t_{\max} \propto L^{-1/\nu} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$$

Sa largeur se comporte aussi comme $L^{-1/\nu}$
et sa hauteur $\propto L^{\delta/\nu}$

Par tracés log-log appropriés, on en déduit ν et δ/ν . On peut bien sûr appliquer même raisonnement à toute quantité qui diverge à transition (c'est chacun spéc)

Transparent

4e) L'invariance conforme

Nous n'avons toujours pas d'"explication" par le fait que exposants critiques à 2D sont souvent fractions rationnelles. Compréhension venue après 1984, quand il a été réalisé que systèmes critiques ne sont pas seulement invariants d'échelle, mais aussi invariants conformes. Dans une transformation conforme, le facteur d'échelle b dépend du point $\vec{r}$ (continûment). La transformation est une combinaison de translation, dilatation, et rotation (jacobien s'écrit comme le produit d'un scalaire $\times$ matrice rotation) $\rightarrow$ préserve les angles. Autre formulation, dans plan complexe $z \mapsto \tilde{z} = f(z)$ doit être homomorphe, de dérivée non nulle.

$\hookrightarrow$ différentiable pt vue complexe

Invariance conforme utile surtout à 2D car le groupe conforme est bcp plus grand que des dimensions supérieures (plus de symétrie à 2D)

$\hookrightarrow$ nécessite mathématiques assez sophistiquées (Cardy ...)

Conclusion : mais nous sommes contents de présenter cadre, et idées

FIP 113
L3

essentiels. Le pb avec la renormalisation est que les exemples simples sont souvent trop simples pour être convaincants, et exemples convaincants nécessitent analyse très technique. Procédure simple à mettre en place sur Ising 1D, avec le défaut (qui simplifie agréablement analyse!) que le hamiltonien renormalisé est du m type que Ising 1D $\rightarrow$ on se déplace sur une droite de l'espace des paramètres (si $B=0$) $\rightarrow$ non générique. Cas traité de Chandler ; cf Le Bellac, ou Le Bellac / Bhatnagar / Montaigne pour Ising 2D

Pb de renormalisation :- cadre g^d mais doit être adapté au pb particulier étudié
- ne permet pas en g^d de calculer exactement exp critiques (trop difficile techniquement)

$\hookrightarrow$ utilité approches numériques.