

THERMODYNAMIQUE – soutien n° 1 :

Lois de probabilité et entropie statistique

Benjamin Langlois, Swann Piatecki et Guilhem Semerjian

15 février 2012

Pour une loi de probabilité sur un ensemble de M évènements, réalisés avec les probabilités $p_1, \dots, p_M$, on appelle entropie de cette loi la quantité

$$- \sum_{i=1}^M p_i \log_2 p_i, \quad (1)$$

où $\log_2$ désigne le logarithme en base 2.

Dans tout le problème on utilisera une pièce biaisée, qui tombe sur pile avec probabilité p , face avec probabilité $1 - p$.

1 Un seul tirage

1. Quelle est l'entropie $S^{(1)}(p)$ associée au résultat d'un seul tirage de cette pièce ?
2. Représenter la fonction $S^{(1)}(p)$ pour $p \in [0, 1]$. On s'attachera en particulier au voisinage de $p = 0$ et de $p = 1$.

2 Un casino au budget illimité

Un joueur, muni de cette pièce biaisée, commence une partie avec un budget nul. A chaque tour de la partie, il tire la pièce ; s'il obtient un pile il gagne une unité d'argent et continue à jouer, s'il obtient un face la partie s'arrête.

1. Représenter le déroulement d'une partie sous la forme d'un arbre, où chaque nœud correspond à un tirage de la pièce.
2. Quelle est la probabilité $Q_n(p)$ que le joueur gagne n unités d'argent au cours d'une partie ?
3. Vérifier la normalisation de cette loi de probabilité.
4. Calculer sa moyenne $M(p) = \sum_{n=0}^{\infty} n Q_n(p)$, et la représenter en fonction de p .
5. Calculer l'entropie $S(p)$ de la loi de probabilité $Q_n(p)$.
6. Exprimer $S(p)$ à l'aide de $S^{(1)}(p)$.
7. Représenter la fonction $S(p)$ pour $p \in [0, 1]$.

3 Un casino au budget limité

On ajoute aux règles du jeu données ci-dessus une limitation sur les gains possibles du joueur : si le gain du joueur atteint un seuil N fixé à l'avance, la partie s'arrête. On reprend les questions précédentes avec cette nouvelle règle.

1. Représenter le déroulement d'une partie sous la forme d'un arbre, où chaque nœud correspond à un tirage de la pièce.

2. Quelle est la probabilité $Q_n^{(N)}(p)$ que le joueur gagne n unités d'argent au cours d'une partie ?
3. Vérifier la normalisation de cette loi de probabilité.
4. Vérifier que dans la limite $N \rightarrow \infty$ vous retrouvez le résultat de l'exercice précédent.
5. Calculer la moyenne $M^{(N)}(p) = \sum_{n=0}^{\infty} n Q_n^{(N)}(p)$, et la représenter en fonction de p .
6. Calculer l'entropie $S^{(N)}(p)$ de la loi de probabilité $Q_n^{(N)}(p)$.
7. Exprimer $S^{(N)}(p)$ à l'aide de $S^{(1)}(p)$.
8. Est-ce que les notations sont cohérentes pour $N = 1$?
9. Représenter la fonction $S^{(N)}(p)$ pour $p \in [0, 1]$.
10. Comment évolue cette fonction quand N grandit ? Discuter sa limite $N \rightarrow \infty$.

4 Probabilités conditionnelles

1. Vérifier que $M^{(N)}(p) = p(1 + M^{(N-1)}(p))$.
2. Interpréter cette relation en termes de moyennes conditionnées au résultat du premier tirage.
3. Dédire de cette interprétation une relation entre $S^{(N)}(p)$ et $S^{(N-1)}(p)$, et vérifier-là à partir de l'expression obtenue précédemment pour $S^{(N)}$.