

THERMODYNAMIQUE – soutien n° 4 :
Rappels de physique statistique

Benjamin Langlois, Swann Piatecki et Guilhem Semerjian

21 mars 2012

1 Modèles de spins d'Ising

On considère un système de N spins d'Ising, dont les configurations microscopiques sont notées $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$, chacun des spins pouvant prendre les valeurs $\sigma_i = \pm 1$. On suppose que son Hamiltonien s'écrit

$$H(\underline{\sigma}) = H_0(\underline{\sigma}) - h \sum_{i=1}^N \sigma_i, \quad (1)$$

où H_0 est une fonction pour l'instant arbitraire. Le système est en contact avec un thermostat de température inverse β ; on notera $\langle \bullet \rangle$ les moyennes statistiques dans l'ensemble canonique.

1. Quel est l'interprétation physique et l'effet de h ?
2. Ecrire la fonction de partition $Z(\beta, h)$, et définir l'énergie libre par spin $f(\beta, h)$.
3. Exprimer l'aimantation moyenne par spin, $m(\beta, h) = \frac{1}{N} \langle \sum_{i=1}^N \sigma_i \rangle$, à l'aide de $f(\beta, h)$.
4. On définit la susceptibilité magnétique $\chi(\beta, h)$ par $\chi(\beta, h) = \frac{\partial m}{\partial h}$. Relier cette quantité aux fluctuations de l'aimantation.
5. Exprimer l'énergie moyenne par spin, $e(\beta, h) = \frac{1}{N} \langle H(\underline{\sigma}) \rangle$, à l'aide de $f(\beta, h)$.
6. En déduire une expression de l'entropie par spin $s(\beta, h)$ en fonction de $f(\beta, h)$, en utilisant la relation de la thermodynamique entre énergie libre, énergie et entropie.
7. Vérifier que cette expression est en accord avec la définition de Shannon de l'entropie statistique.
8. Relier la chaleur spécifique, $C = \frac{\partial}{\partial T} \langle H(\underline{\sigma}) \rangle$, aux fluctuations de l'énergie.

2 Un modèle sans interactions

On considère un cas particulier des définitions ci-dessus, où $H_0(\underline{\sigma}) = 0$ pour toutes les configurations.

1. Calculer la fonction de partition $Z(\beta, h)$, et l'énergie libre par spin $f(\beta, h)$.
2. Calculer l'aimantation moyenne par spin $m(\beta, h)$ à partir de la formule générale obtenue dans la première partie, et vérifier-la par un calcul direct.
3. Calculer l'énergie moyenne et l'entropie du système $s(\beta, h)$.
4. Combien y a-t-il de configurations avec une aimantation par spin m donnée ?
5. Faire le lien, dans la limite thermodynamique, entre vos réponses aux deux dernières questions.